1 Ejercicios de examen

Exercise 1 *[**Febrero 2012, 0.75 puntos**]**Corregido**. En una cooperativa agrícola se comercializa la producción de cítricos de tres fincas A, B, y C. Las fincas B y C tiene el mismo volumen de producción, mientras que la finca A produce lo mismo que las otras fincas juntas. Por experiencias previas, se sabe que aproximadamente el 5% de la fruta es recolectada por la finca A se encuentra en mal estado, el 4% para la finca B y el 3% para la finca C. Se elige una pieza de fruta al azar de la producción, se pide:*

a) Calcular la probabilidad de que la fruta no se encuentre en mal estado. (**0.25 puntos**)
b) Se comprueba que la fruta seleccionada se encuentra en mal estado, ¿De cuál de las tres fincas es más probable que proceda y con qué probabilidad?. (**0.25 puntos**)
c) Determinar la probabilidad de que la pieza de fruta no esté en mal estado y no proceda de la finca A. (**0.25 puntos**)

$$\begin{array}{|ll} F_A = \text{Finca A} = & 2x \rightarrow p(A) = 0,5 \\ F_B = \text{Finca B} = & x \rightarrow p(B) = 0,25 \\ F_C = \text{Finca C} = & \dfrac{x \rightarrow p(C) = 0,25}{4x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{4}} \end{array}$$

Definición datos

$$\begin{array}{|l} Q = \text{Estar en mal estado} \\ p(Q/F_A) = 0.05 \\ p(Q/F_B) = 0.04 \\ p(Q/F_C) = 0.03 \end{array}$$

a)

$$p\left(\overline{Q}\right) = 1 - p\left(Q\right) \rightarrow_{(1)} 1 - 0.0425 = 0.9575$$

$$\begin{aligned} {}^{(1)}p(Q) &= \sum_{i=1}^{3} p(F_i) * p(Q/F_i) \rightarrow p(F_A) * p(Q/F_A) + p(F_B) * p(Q/F_B) + p(F_C) * p(Q/F_C) \rightarrow \\ &\rightarrow 0.5 * 0.05 + 0.25 * 0.04 + 0.25 * 0.03 = 0.0425 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} p[Q \cap (F_A \cup F_B \cup F_C)] &\rightarrow p[(Q \cap F_A) \cup (Q \cap F_B) \cup (Q \cap F_C)] \xrightarrow{Incompatibles} \\ &\rightarrow \sum_{i=1}^{3} (F_i) * p(Q/F_i) = 0.0425 \end{aligned}$$

$$p(F_A/Q) \mapsto \frac{p(A) * p(Q/F_A)}{p[Q \cap (F_A \cup F_B \cup F_C)]} \Rightarrow \frac{0.5 * 0.05}{0.0425} \to F_A = 0.5882$$

$$p(F_B/Q) \mapsto \frac{p(B) * p(Q/F_B)}{p[Q \cap (F_A \cup F_B \cup F_C)]} \Rightarrow \frac{0.25 * 0.04}{0.0425} \to F_B = 0.2353$$

$$p(F_C/Q) \mapsto \frac{p(C) * p(Q/F_C)}{p[Q \cap (F_A \cup F_B \cup F_C)]} \Rightarrow \frac{0.25 * 0.03}{0.0425} \to F_C = 0.1765$$

c)

$$p(\overline{Q} \cap \overline{F_A}) \overset{\text{Ley de Morgan}}{\longrightarrow} p(\overline{Q \cup F_A}) \to 1 - p(Q \cup F_A) \to_{(2)} 1 - 0.5175 = 0.4825$$

$$\begin{aligned} {}^{(2)}p(Q \cup F_A) &= p(Q) + p(F_A) - p(Q \cap F_A) = p(Q) + p(F_A) - p(F_A) * p(Q/F_A) = \\ &= 0.0425 + 0.5 - 0.5 * 0.05 = 0.5175 \end{aligned}$$

Exercise 2 ***[Febrero 2013, 0.75 puntos]Corregido.*** *En una determinada explotación agraria se cultivan 3 variedades de pimientos, P_1, P_2 y P_3. El 36% de la producción total de pimientos es de la variedad P_1 y las otras dos variedades de pimiento tienen el mismo volumen de producción. Se sabe que la probabilidad de que en la variedad P_1 aparezca un determinado tipo de parásito es del 0.8 y la probabilidad de que la variedad P_2 no aparezca el citado parásito es del 15%. Además, por experiencias previas, se sabe que el 24% de la producción es de la variedad P_3 y presenta este tipo de parásito. Se pide:*

a) Determinar la probabilidad de que elegido un pimiento al azar de la producción de la explotación no presente el citado parásito. (**0.25 puntos**)
b) Si el pimiento elegido presenta el citado parásito, determinar la probabilidad de que no sea la variedad P_2 . (**0.25 puntos**)
c) Determinar la probabilidad de que el pimiento no presente el citado parásito y no sea de la variedad P_3 . (**0.25 puntos**)

$$\left| \begin{array}{l} P_1 = \text{Pimiento } 1 \rightarrow p(P_1) = 0.36 \\ P_2 = \text{Pimiento } 2 \rightarrow p(P_2) = 0.32 \\ P_3 = \text{Pimiento } 3 \rightarrow p(P_3) = 0.32 \end{array} \right.$$

Definición datos

$$\left| \begin{array}{ll} Q \equiv \text{Aparición parásito} & \\ p\left(Q/P_1\right) = 0.8 & \\ p\left(\overline{Q}/P_2\right) = 0.15 & \Rightarrow 1 - p\left(\overline{Q}/P_2\right) = p\left(Q/P_2\right) \rightarrow 0.85 \\ p\left(Q \cap P_3\right) = 0.24 & \Rightarrow \dfrac{p\left(Q \cap P_3\right)}{p(P_3)} = p\left(Q/P_3\right) \rightarrow p\left(Q/P_3\right) = 0.75 \end{array} \right.$$

a)

$$p(\overline{Q}) = 1 - p(Q) \rightarrow_{(1)} 1 - 0.8 = 0.2$$

$$\begin{aligned} {}^{(1)}p(Q) &= \sum_{i=1}^{3} p(P_i) * p(Q/P_i) \rightarrow p(P_1) * p\left(Q/P_1\right) + p(P_2) * p\left(Q/P_2\right) + p(P_3) * p\left(Q/P_3\right) \rightarrow \\ &\rightarrow 0.36 * 0.8 + 0.32 * 0.85 + 0.32 * 0.75 = 0.8 \end{aligned}$$

b)

$$p(\overline{P_2}/Q) = 1 - p(P_2/Q) \rightarrow 1 - \frac{p(P_2 \cap Q)}{p(Q)} \rightarrow 1 - \frac{p(P_2) * p\left(Q/P_2\right)}{p(Q)} = 1 - \frac{0.32 * 0.85}{0.8} = 0.66$$

c)

$$p[\overline{Q} \cap \overline{P_2}] \rightarrow 1 - p(Q \cup P_2) \rightarrow_{(2)} 1 - 0.272 = 0.152$$

$$^{(2)}p(Q \cup P_2) = p(Q) + p(P_2) - p(P_2) * p\left(Q/P_2\right) = 0.8 + 0.32 - 0.32 * 0,85 = 0.848$$

Exercise 3 ***[Septiembre 2013, 0.75 puntos]Corregido****. En una determinada explotación agraria de 7000 hectáreas se cultivan 3 tipos de frutales. En 3000 hectáreas se cultivan melocotones, en 2500 hectáreas se cultivan albaricoques y en el resto ciruelas. Por experiencias previas, se sabe que aproximadamente el 5% de los melocotones se encuentra en mal estado, el 4% de albaricoques se encuentra en mal estado, mientras que el 0,63% de la fruta de la explotación es ciruela y se encuentra en mal estado. Se elige una pieza de fruta al azar de la explotación agrícola, se pide:*

a) Calcular la probabilidad de que no se encuentre en mal estado (**0.25 puntos**)
b) Si la pieza de fruto se encuentra en mal estado, determinar la probabilidad de que esa fruta sea una ciruela. (**0.25 puntos**)
c) Determinar la probabilidad de que la pieza de fruta no se encuentre en mal estado y sea ciruela o albaricoque. (**0.25 puntos**)

$$\left| \begin{array}{l} M \equiv Melcotones \longrightarrow p\left(M\right) = \frac{3000}{7000} = \frac{6}{14} \\ \\ A \equiv Albaricoques \longrightarrow p\left(A\right) = \frac{2500}{7000} = \frac{5}{14} \\ \\ C \equiv Ciruelas \longrightarrow p\left(C\right) = \frac{1500}{7000} = \frac{3}{14} \end{array} \right.$$

Definición de los datos

$$\left| \begin{array}{ll} Q \equiv \text{Estar en mal estado} & \\ p\left(Q/M\right) = 0.05 & \\ p\left(Q/A\right) = 0.04 & \\ p\left(Q \cap C\right) = 0.0063 & \Longrightarrow p\left(C\right) * p\left(Q/C\right) \longrightarrow \frac{0.0063}{p(C)} = p\left(Q/C\right) \longrightarrow \frac{0.0063}{\frac{3}{14}} = 0,0294 \end{array} \right.$$

a)

$$p\left(\overline{Q}\right) = 1 - p\left(Q\right) \rightarrow_{(1)} 1 - 0,42 = 0,958$$

$$\begin{aligned} ^{(1)}p\left(Q\right) &= p\left(M\right) * p\left(Q/M\right) + p\left(A\right) * p\left(Q/A\right) + \overbrace{p\left(C\right) * p\left(Q/C\right)}^{p(Q \cap C)} \rightarrow \\ &\rightarrow p\left(Q\right) = \frac{6}{14} * 0.05 + \frac{5}{14} * 0,04 + 0,0063 = 0,042 \end{aligned}$$

b)

$$p\left(C/Q\right)=\frac{p\left(C\cap Q\right)}{p\left(Q\right)}\rightarrow\frac{0.0063}{0.042}=0.15$$

c)

$$p\left[\overline{Q}\cap\left(C\cup A\right)\right]=p\left[\left(\overline{Q}\cap C\right)\left(\overline{Q}\cap A\right)\right]\overset{Incompatibles}{\longrightarrow}p\left(\overline{Q}\cap C\right)+\left(\overline{Q}\cap A\right)\rightarrow$$

$$\rightarrow p(C)*p(\overline{Q}/C)+p(A)*p(\overline{Q}/A)\rightarrow p(C)*(1-p(Q/C))+p(A)*(1-p(Q/A))\rightarrow$$

$$\rightarrow\frac{3}{14}*0.9706+\frac{5}{14}*0.96=0.5508$$

2 Ejercicios de hojas de problemas

Exercise 4 *[2012, **Problemas modelo A**] **Corregido**. Los ladrillos fabricados por una empresa pueden tener dos tipos de defectos D_1 y D_2. El defecto D_1 ocurre con una probabilidad de 0.07, el defecto D_2 con una probabilidad de 0.06 y en el 2% de los ladrillos ocurren ambos tipos de defectos. Se pide*

a) Calcular la probabilidad de que al seleccionar un ladrillo al azar de la producción no tenga ningún tipo de defecto
b) Calcular la probabilidad de que el ladrillo seleccionado tenga exactamente un único tipo de defecto
c) Cada ladrillo se somete de manera automática a un test de ruptura, con las siguientes probabilidades

- Si el ladrillo tiene alguno de los defectos tiene una probabilidad de romperse del 0.85
- Si el ladrillo no tiene ninguno de los defecto tiene una probabilidad de romperse de 0.06

Se pide:
c1) Calcular la probabilidad de que un ladrillo seleccionado al azar se rompa durante el test
c2) Si un ladrillo escogido al azar no se ha roto durante el test, ¿Cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

$$\left| \begin{array}{r} p(D_1) = 0.07 \\ p(D_2) = 0.06 \\ p(D_1 \cap D_2) = 0.02 \end{array} \right.$$

a)

$$\begin{aligned} p(\overline{D_1} \cap \overline{D_2}) &= p(\overline{D_1 \cup D_2}) \rightarrow 1 - p(D_1 \cup D_2) \rightarrow 1 - [p(D_1) + p(D_2) - p(D_1 \cap D_2)] \rightarrow \\ &\rightarrow 1 - (0.07 + 0.06 - 0.02) = 0.89 \end{aligned}$$

b)

$$p[((\overline{D_1} \cap D_2) \cup (D_1 \cap \overline{D_2}))] \rightarrow p(D_1 \cup D_2) - p(D_1 \cap D_2) = 0.11 - 0.02 = 0.09$$

c)

$$\left| \begin{array}{r} D \equiv \text{Defectuoso} \\ p(D) = 0.11 \\ p(\overline{D}) = 0.89 \\ p(R) \equiv \text{Rotura} \\ p(R/D) = 0.85 \\ p(R/\overline{D}) = 0.06 \end{array} \right.$$

c_1)

$$p(R) = p(D) * p(R/D) + p(\overline{D}) * p(R/\overline{D}) = 0.11 * 0.85 + 0.89 * 0.06 = 0,1469$$

c_2)

$$p(D/\overline{R}) \xrightarrow{\text{Teorema de Bayes}} \frac{p(D) * p(\overline{R}/D)}{p(\overline{R})} \rightarrow \frac{p(D) * (1 - p((R/D))}{1 - p(R)} = \frac{0.11 * (1 - 0.85)}{1 - 0.1469} = 0.0193$$

Exercise 5 ***[2014, Problemas modelo B] Corregido****. En una empresa conservera, se dispone de tres máquinas M_1,M_2 y M_3 que envasan en botes el mismo producto. La máquina M_1 produce el doble que las otras dos máquinas juntas y la producción de la máquina M_2 es la mitad de la producción de la máquina M_3. Sabemos que los botes producidos pasan un test de calidad y pueen ser retirados debido a múltiples causas, ocurriendo esto en 3 de cada 150 botes producidos por la máquina M_1 y en 5 de cada 100 botes producidos por la máquina M_2. Por otra parte, se sabe que el 21,4% del producto se envasa en la máquina M_3 y pasa el test de calidad. A partir de los datos se pide:*

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, al escoger un bote al azar, no pase el test de calidad?
b) Si se ha escogido el bote y no pasa el test de calidad ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido producido por la máquina M_2 ó la máquina M_3?
c) Calcular la probabilidad de que un bote pase el test de calidad y haya sido producido por la máquina M_2ó la máquina M_3?

$$\left| \begin{array}{ll} M_1 = \text{Máquina 1} = & 2\left(x + \dfrac{x}{2}\right) \rightarrow p(M_1) = \dfrac{6}{9} \\ M_2 = \text{Máquina 2} = & \dfrac{x}{2} \rightarrow p(M_2) = \dfrac{1}{9} \\ M_3 = \text{Máquina 3} = & \dfrac{x \rightarrow p(M_3) = \dfrac{2}{9}}{4.5x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{2}{9}} \end{array} \right.$$

Definición datos

$$\left| \begin{array}{ll} Q \equiv \text{No pasa el test} & \\ p\left(Q/M_1\right) = \dfrac{3}{150} & \\ p\left(Q/M_2\right) = \dfrac{5}{100} & \\ p\left(\overline{Q} \cap M_3\right) = 0.214 & \begin{array}{l} \Longrightarrow p\left(M_3\right) * p\left(\overline{Q}/M_3\right) \longrightarrow \dfrac{0.0063}{\dfrac{2}{9}} = p\left(\overline{Q}/M_3\right) = 0.963 \rightarrow \\ \rightarrow p\left(Q/M_3\right) = 1 - p\left(\overline{Q}/M_3\right) = 0.037 \end{array} \end{array} \right.$$

a)

$$
\begin{aligned}
p(Q) &= \sum_{i=1}^{3} p(M_i) * p(Q/M_i) \rightarrow p(M_1) * p\left(Q/M_1\right) + p(M_2) * p\left(Q/M_2\right) + p(M_3) * p\left(Q/M_3\right) \rightarrow \\
&\rightarrow \frac{6}{9} * \frac{3}{150} + \frac{1}{9} * \frac{5}{100} + \frac{2}{9} * 0,037 = 0.0271
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
p(M_2 \cup M_3/Q) &= \frac{p[Q \cap (M_2 \cup M_3)]}{p(Q)} \xrightarrow{Incompatibles} \frac{p(Q \cap M_2) + p(Q \cap M_3)}{p(Q)} \rightarrow \\
&\rightarrow \frac{p(M_2) * p\left(Q/M_2\right) + p(M_3) * p\left(Q/M_3\right)}{p(Q)} = \frac{(\frac{1}{9} * \frac{5}{100}) + (\frac{2}{9} * 0.037)}{0.0271} = 0.5092
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
p(\overline{Q} \cap (M_2 \cup M_3)) &\rightarrow p[(\overline{Q} \cap M_2) \cup (\overline{Q} \cap M_3)] \xrightarrow{Incompatibles} p(\overline{Q} \cap M_2) + p(\overline{Q} \cap M_3) \rightarrow \\
&\rightarrow p(M_2) * (1 - p\left(Q/M_2\right)) + p(M_3) * (1 - p\left(Q/M_3\right)) \rightarrow \\
&\rightarrow (\frac{1}{9} * (1 - \frac{5}{100})) + (\frac{2}{9} * (1 - 0.037)) = 0.319
\end{aligned}
$$

Exercise 6 ***[Hoja 2, 2013] Corregido****. Un determinado equipo fotográfico infrarrojo puede ser montado en tres dispositivos diferentes A, B y C con probabilidades 0.35 ,0.25 y 0.4 respectivamente.Sabemos que las lecturas obtenidas puede ser inutilizadas debido a las interferencias con otros sistemas, ocurriendo esto en 5 de cada 100 casos cuando se monta el dispositivo A, 3 de cada 150 cuando se hace en el B y 2 de cada 250 cuando se monta en el dispositivo C. A partir de estos datos se pide:*

a) Determinar la probabilidad de que la imagen obtenida sea inutilizable
b) Determinar la probabilidad de que la imagen no se pueda utilizar y que se haya obtenido al montarse en el equipo C

$$\left| \begin{array}{l} E_A = \text{Equipo A } = 0.35 \\ E_B = \text{Equipo B } = 0.25 \\ E_C = \text{Equipo C } = 0.4 \end{array} \right.$$

Definición datos

$$\left| \begin{array}{c} I \equiv \text{Inutilizable} \\ p(I/E_A) = 0.05 \\ p(I/E_B) = 0.02 \\ p(I/E_C) = 0.008 \end{array} \right.$$

a)

$$\begin{aligned} p(I) &= \sum_{i=1}^{3}(E_i) * p(Q/E_i) = (E_A) * p(I/E_A) + (E_B) * p(I/E_B) + (E_C) * p(I/E_C) \rightarrow \\ &\rightarrow 0.35 * 0.05 + 0,25 * 0.02 + 0.4 * 0.008 = 0.0257 \end{aligned}$$

b)

$$p(I \cap E_C) = p(I) * p(I/E_C) = 0.35 * 0.0.0175$$

c)

$$p(I \cap (E_A \cup E_B \cup E_C)) \rightarrow p((E_A \cap I) \cup (E_B \cap I) \cup (E_C \cap I)) = \sum_{i=1}^{3}(E_i) * p(Q/E_i) = 0.0257$$

$$p(I/E_A) \mapsto \frac{p(E_A) * p(I/E_A)}{p[I \cap (E_A \cup E_B \cup E_C)]} \Rightarrow \frac{0.35 * 0.05}{0.0257} \rightarrow E_A = 0.6809$$

$$p(I/E_B) \mapsto \frac{p(E_B) * p(I/E_B)}{p[I \cap (E_A \cup E_B \cup E_C)]} \Rightarrow \frac{0.25 * 0.02}{0.0257} \rightarrow E_B = 0.1945$$

$$p(I/E_C) \mapsto \frac{p(E_C) * p(I/E_C)}{p[I \cap (E_A \cup E_B \cup E_C)]} \Rightarrow \frac{0.4 * 0.008}{0.0257} \rightarrow E_C = 0.1245$$

Exercise 7 *[Hoja 2, 2013]* ***Corregido****. En una explotación agrícola se recolecta fruta mediante 3 proceimientos diferentes A, B y C, siendo los porcentajes de recolección de la fruta mediante los procedimientos anteriores 20%, 30% y 45%, respectivamente. Ahora bien, se sabe que los procedimientos A y B son equiprobables y que el procedimiento C se emplea 3 veces más que el procedimiento A. Se pide:*

a) Definir previamente los sucesos correspondientes, sus probabilidades asociadas y determinar la probabilidad de recolectar fruto en la explotación.
b) Una vez que se ha recolectado fruta en la explotación, ¿Cuál de los procedimientos anteriores se ha utilizado con más probabilidad?
c) Determinar la probabilidad de que se haya recolectado fruta en la explotación y no haya sido mediante el procedimiento C.
d) Determinar la probabilidad de que se haya recolectado fruta en la explotación, sabiendo que ha sido mediante el procedimiento A o el procedimiento B

$$\left| \begin{array}{ll} P_A = \text{Procedimiento A} = & x \rightarrow p(P_A) = 0.2 \\ P_B = \text{Procedimiento B} = & x \rightarrow p(P_B) = 0.2 \\ P_C = \text{Procedimiento C} = & \dfrac{3x \rightarrow p(P_C) = 0.6}{5x = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{5}} \end{array} \right.$$

Definición datos

$$\left| \begin{array}{c} R \equiv \text{Recolección} \\ p(R/P_A) = 0.2 \\ p(R/P_B) = 0.3 \\ p(R/P_C) = 0.45 \end{array} \right.$$

a)

$$\begin{aligned} p(R) &= \sum_{i=1}^{3} (P_i) * p(R/P_i) = P_A * p(R/P_A) + P_B * p(R/P_B) + P_C * p(R/P_C) \rightarrow \\ &\rightarrow 0.2 * 0.2 + 0.2 * 0.3 + 0.6 * 0.45 = 0.37 \end{aligned}$$

b)

$$p(P_A/R) \mapsto \frac{p(P_A) * p(R/P_A)}{p[R \cap (P_A \cup P_B \cup P_C)]} \Rightarrow \frac{0.2 * 0.2}{0.37} \rightarrow P_A = 0.1081$$

$$p(P_B/R) \mapsto \frac{p(P_B) * p(R/P_B)}{p[R \cap (P_A \cup P_B \cup P_C)]} \Rightarrow \frac{0.2 * 0.3}{0.37} \rightarrow P_B = 0.1622$$

$$p(P_C/R) \mapsto \frac{p(P_C) * p(R/P_C)}{p[R \cap (P_A \cup P_B \cup P_C)]} \Rightarrow \frac{0.6 * 0.45}{0.37} \rightarrow P_C = 0.7297$$

c)

$$p(R \cap \overline{P_C}) = p(R) * p(\overline{P_C}/R) = p(R) * (1 - p(P_C/R)) \rightarrow 0.37 * (1 - 0.7297) = 0.1$$

d)

$$\begin{aligned} p(R/P_A \cup P_B) &= \frac{p[R \cap (P_A \cup P_B)]}{p(P_A \cup P_B)} = \frac{p[(R \cap P_A) \cup (R \cap P_B)]}{p(P_A \cup P_B)} \xrightarrow{Incompatibles} \frac{p(R \cap P_A) + p(R \cap P_B)}{p(P_A) + p(P_B)} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{p(P_A) * p(R/P_A) + p(P_B) * p(R/P_B)}{0.2 + 0.2} = \frac{0.2 * 0.2 + 0.2 * 0.3}{0.4} = 0.25 \end{aligned}$$