Dpto. Matemática Aplicada y Estadística

Grado en IIAA y Grado en IHJ

Asignatura: **Estadística Aplicada. Curso 2011-2012**

HOJA 3A: Variables Aleatorias

1. Probar si las siguientes funciones pueden definir funciones puntuales de probabilidad asociadas a las variables que se indican.

   (a) $f(x) = \dfrac{x}{6}$ para $x = 1, 2, 3$. (b) $f(x) = \dfrac{5 - x^2}{6}$ para $x = 0, 1, 2, 3$.

   (c) $f(x) = 0.25$ para $x = 3, 4, 5, 6$. (d) $f(x) = \dfrac{x - 2}{2}$ para $x = 1, 2, 3, 4$.

   (e) $f(x) = \dfrac{x^2}{25}$ para $x = 0, 1, 2, 3, 4$. (f) $f(x) = \dfrac{k}{2^x}$ para $x = 0, 1, 2, 3$.

   Para aquellos casos que sean funciones puntuales de probabilidad, obtener la función de distribución asociada.

2. Consideremos el experimento aleatorio de lanzar 3 veces una moneda. Definamos la v.a. de X como *la diferencia entre el número de caras y el de cruces*. Hallar la función puntual de probabilidad y la función de distribución de la v.a. X suponiendo que la moneda está trucada de tal forma que una cara tiene dos veces más de probabilidad de ocurrir que una cruz. Calcular las siguientes probabilidades: $P(-1 \leq X \leq 3)$, $P(-1 < X \leq 3)$, $P(-1 \leq X < 3)$ y $P(X < 3/X \geq -1)$.

3. En un proceso de fabricación de copas de cristal, las bases se sellan calentándolas con una llama. La temperatura X de ésta varía de manera aleatoria, siguiendo la distribución de probabilidad siguiente:

Temperatura	540^0C	545^0C	550^0C	555^0C	560^0C
Pr*obabilidad*	0.1	0.25	0.3	0.25	?

   (a) Encontrar el valor que falta en la tabla.
   (b) Calcular la media y la desviación típica de X.
   (c) La temperatura óptima es de 550^0C. ¿Cuál es la media y la desviación típica de la diferencia entre X y la temperatura óptima?
   (d) Para un informe, imagina que debes pasar los resultados de grados Centígrados a grados Farenheit, siendo la relación

   $$Y = \frac{9}{5}X + 32$$

   ¿Cuál es la media y la desviación típica de la temperatura expresada en grados Farenheit?

4. Probar si las siguientes funciones pueden ser funciones de densidad y calcular las funciones de distribución asociadas:

   (a) $f(x) = x^2$ si $0 < x < 2$ (cero en el resto).
   (b) $f(x) = k(3x + 1)$ si $1 < x < 3$ (cero en el resto).
   (c) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}x^2, & \text{si } x \in [0, 2] \\ k(x + 1), & \text{si } x \in (2, 4] \end{cases}$ (cero en el resto).
   (d) $f(x) = \begin{cases} kx & \text{si } 0 < x < 2 \\ 1 - kx & \text{si } 2 < x < 4 \end{cases}$ (cero en el resto).

5. La intensidad de un impulso sigue una variable aleatoria **continua**, X, cuya función de distribución es:

   $$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2/9, & 0 \leq x < 3 \\ 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

   Se pide:

   (a) La función de densidad de la variable aleatoria X.
   (b) Calcular las siguientes probabilidades: $P(X < 0.9)$, $P(1 < X < 2)$ y $P(X < 2/X \geq 1)$.

6. El espesor solicitado para cierto material puede considerarse una variable aleatoria **discreta**, X, con función de distribución:

   $$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 1/4 \\ 0.2, & \text{si } 1/4 \leq x < 1/2 \\ 0.9, & \text{si } 1/2 \leq x < 3/4 \\ 1, & x \geq 3/4 \end{cases}$$

   (a) Calcular la función puntual de probabilidad asociada a dicha variable.
   (a) Calcular la probabilidad de que se solicite un material con un espesor ≤ 0.7, sabiendo que debe de ser > 0.3.

7. La duración (en días) de un tipo de bombillas se puede modelizar mediante una variable aleatoria X cuya función de densidad es:

   $$f(x) = \begin{cases} k/x^2, & \text{si } 100 \leq x \leq 1000 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

(a) Determinar el valor de la constante k para que $f(x)$ sea verdaderamente una función de densidad. Determinar la función de distribución de la v.a. X.
(b) Obtener la duración media de este tipo de bombillas así como la desviación estándar de X.
(c) Determinar la probabilidad: $P(200 < X < 300)$.
(d) ¿Cuánto debería de valer la garantía (en días) de las bombillas para que sólo fallen el 10% de las bombillas?

8. En la producción de gasolina, la proporción de aditivo es una variable aleatoria X con función de densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} kx(1-x), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

se pide:

(a) Determinar el valor de k para que $f(x)$ sea verdaderamente una función de densidad.
(b) Determinar la función de distribución asociada a la v.a. X.
(c) Obtener la proporción media de aditivo en la gasolina.
(d) La proporción de este aditivo en la gasolina determina su precio con la siguiente regla: si $x < 0.5$, tendremos una gasolina del TIPO 1 a **1 €/litro**, si $0.5 \leq x < 0.8$, tendremos una gasolina del TIPO 2 a **1.2 €/litro**, y si $x \geq 0.8$, tendremos una gasolina de TIPO 3 a **1.5 €/litro**. Determinar el precio medio del litro de gasolina.

9. La producción semanal en miles de galones de una determinada planta de destilación de derivados del petróleo se distribuye como una variable aleatoria cuya función de densidad viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1/4, & 0 \leq x < 2 \\ \frac{1}{4}(4-x), & 2 \leq x < M \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se pide:

(a) Determinar la producción máxima admisible, es decir, el valor de la constante M para que $f(x)$ sea verdaderamente una función de densidad.
(b) Calcular la función de distribución asociada y la producción semanal promedio.
(c) Calcular la probabilidad de que se produzcan menos de 3 mil galones sabiendo que se producen más de 1.5 miles de galones.

10. En un proceso de llenado de latas de aceite, el contenido (en litros) de las mismas es $Y = 100 + X$ donde X es una variable aleatoria con función de densidad dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1-\mid x \mid, & x \in (-2,2) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(a) Calcular la función de distribución de la variable aleatoria X.
(b) Calcular el contenido medio de las latas de aceite.
(c) Calcular la probabilidad de que una lata de aceite contenga 100 o más litros.
(d) Calcular la probabilidad de que una lata de aceite contenga 100 litros o más, sabiendo que al menos contiene 99 litros y medio.

11. Se sabe que el tiempo de vida de un componente electrónico es una variable aleatoria de media 350h. y desviación típica 35h.

(a) Obtener un intervalo centrado en la media que contenga al menos el 80% de los tiempos de vida de los componentes producidos.
(b) ¿Es muy probable observar un componente con vida mayor que 455h. o menor que 245h.?

12. Una máquina fabrica teclas cuadradas estándar de teclados de PCs, siguiendo la longitud de los lados una distribución con media 12.5 mm y desviación típica 0.0025 mm. Si alguna de las piezas difiere en más de 0.005 mm de la media es rechazada, ya que provocaría un fallo en la cadena de montaje del teclado.

(a) ¿Cuál es, como máximo, el porcentaje de piezas defectuosas que fabrica la máquina?
(b) Obtener un intervalo centrado en la media que contenga al menos el 90% de las longitudes de los lados.