Dpto. Matemática Aplicada y Estadística

Grado en IIAA y Grado en IHJ
Asignatura: **Estadística Aplicada. Curso 2012-2013**
JUNIO 2013

NOMBRE:...**APELLIDOS:**..
ESPECIALIDAD:..

1. [**0.75 puntos**] Se realizó un estudio de la cantidad de precipitación pluvial diaria (X, en l/m^2) y la cantidad de contaminación presente en el aire (Y, en %). Para ello se tomaron 9 observaciones de X e Y y se ajustó la siguiente recta de regresión de Y sobre X con la ayuda del programa Rcmdr:

$$Y = aX + 42.92 \text{ con } r = -0.9$$

   (a) Sabiendo que la varianza de la característica X es 3.91 y la varianza de la característica Y es 2.23, determinar el valor de la pendiente del modelo, es decir, determinar el valor de a. (**0.5 puntos**)

   (b) ¿Es cierto que a medida que aumentan las precipitaciones aumenta el nivel de contaminación? Razonar la respuesta. (**0.25 puntos**)

2. [**0.75 puntos**] Una cooperativa agrícola dedicada al cultivo de cereal dispone de tres tipos de fertilizantes F1, F2 y F3 que pueden utilizar sus socios para conseguir aumentar la rentabilidad de las semillas. El producto F1 es utilizado por el 25% de los socios, el producto F2 es utilizado por el 40% de los cooperativistas y el resto emplean el producto F3 que es mucho más caro que los anteriores. La probabilidad de que el rendimiento medio por Ha sea superior a 45 Tm es igual a 0.85 cuando se utiliza el producto F1, a 0.87 cuando se utiliza el producto F2, mientras que el 32% de los socios utilizan el fertilizante F3 y consiguen un rendimiento medio por Ha por encima de las 45 Tm. Se pide:

   (a) Determinar la probabilidad de que elegido un socio al azar de la cooperativa consiga un rendimiento medio por Ha por encima de las 45 Tm. (**0.25 puntos**)

   (b) Si en una parcela el rendimiento medio por Ha no ha estado por encima de las 45 Tm., determinar qué tipo de fertilizante ha utilizado y con qué probabilidad.(**0.25 puntos**)

   (c) Determinar la probabilidad de que en una parcela el rendimiento medio por Ha haya estado por encima de las 45 Tm. y no se haya utilizado el fertilizante F3. (**0.25 puntos**)

3. [**0.75 puntos**] El espesor solicitado para un determinado material puede considerarse como una variable aleatoria discreta cuya función puntual de probabilidad viene dada por:

$$f(x) = k(8x+1) \text{ para } x = \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}$$

   Se pide:

   (a) Determinar el valor de k para que $f(x)$ sea verdaderamente una función puntual de probabilidad. (**0.10 puntos**)

   (b) Determinar la función de distribución de la variable aleatoria X y el espesor solicitado medio del material. (**0.40 puntos**)

   (c) Sabiendo que el espesor del material debe ser mayor que 0.12, determinar la probabilidad de que se solicite un espesor menor o igual a 0.3 (**0.25 puntos**)

4. [**1 punto**] El número de avisos que recibe el servicio de emergencia al día se puede modelizar como una variable aleatoria de Poisson de media 3 servicios, y por tanto, el tiempo transcurrido, en horas, entre dos servicios consecutivos se distribuye como una variable exponencial de media 8 horas. Sabiendo que el servicio de emergencia de esa ciudad es capaz de atender como máximo 5 emergencias al día, se pide:

   (a) Determinar la probabilidad de que en un día no se puedan atender todas la emergencias. (**0.25 puntos**)

(b) Determinar la probabilidad de que en dos días el número de servicios sea exactamente de 8 servicios. (**0.25 puntos**)

(c) Sabiendo que en un determinado día el tiempo transcurrido entre dos avisos consecutivos es al menos de 10 horas, determinar la probabilidad de que no se reciba aviso alguno en las siguientes 8 horas. (**0.5 puntos**)

5. [**1.5 puntos**] El contenido de azúcar por botella, en gramos, de una determinada marca de vinos espumosos se puede considerar como una variable aleatoria de media 24 y de desviación típica 1.8 gr. Las especificaciones del mercado obligatorias para el cava "seco" es que el contenido de azúcar no se aleje del contenido medio en más de 2.88 gr.

   (a) ¿Podrías dar una cota de la proporción de botellas que verifican las especificaciones del mercado para el cava "seco"? Razonar la respuesta. (**0.25 puntos**)

   (b) Asumiendo a partir de este momento que el contenido de azúcar por botella se puede modelizar como una distribución normal de media 24 gramos y de desviación típica 1.8 gramos, dar respuesta a las siguientes cuestiones

      (b1) Determinar el porcentaje de botellas que verifican las especificaciones del mercado para el cava "seco". (**0.25 puntos**)

      (b2) Elegido un paquete de 6 botelllas, determinar la probabilidad de que al menos 5 de ellas verifiquen las especificaciones del mercado para el cava "seco".(**0.25 puntos**)

      (b3) Si una licorería hace un pedido de 1000 botellas, determinar el número esperado de botellas que no verifican las especificaciones de mercado del cava "seco" y la probabilidad de que entre las 1000 a lo sumo 90 no verifiquen las especificaciones del mercado para el cava "seco". (**0.75 puntos**)

6. [**1.25 puntos**] El calcio se presenta normalmente en la sangre de los mamíferos en concentraciones de alrededor de 6 mg por cada 100 ml del total de sangre. Una concentración mayor o igual a 6.5 mg. por cada 100 ml. del volumen total de sangre puede ocasionar graves trastornos en la coagulación de la sangre. Una serie de 22 pruebas sobre un paciente dieron los resultados que vienen en la tabla siguiente:

$$\sum_{i=1}^{22} x_i = 133$$

$$\sum_{i=1}^{22} x_i^2 = 825$$

   Admitiendo la hipótesis de normalidad para la concentración de calcio por cada 100 ml. del total de sangre, se pide:

   (a) Construir de manera detallada un intervalo de confianza al 95% para la concentración media de calcio por cada 100 ml. del total de sangre ¿Cuál es el efecto de aumentar el nivel de confianza en el margen de error de este intervalo? **(0.5 ptos.)**

   (b) A partir de los datos muestrales, ¿se puede concluir al 95% de confianza que este paciente no va a tener trastornos en la coagulación de la sangre, esto es, que la concentración media de calcio por cada 100 ml. del total de sangre es significativamente menor a 6.5 mg. por cada 100 ml. del volumen total de sangre? Plantear y llevar a cabo el contraste adecuado para responder a esta pregunta. Calcular de manera aproximada el $p - valor$ de la prueba.**(0.5 ptos.)**

   (c) Supongamos que la desviación típica de la v.a. la concentración de calcio por cada 100 ml. del total de sangre es igual a $\sigma = 1$ mg. por cada 100 ml., determinar qué tamaño de la muestra será necesario utilizar si se desea que el margen de error sea menor que 0.35 mg. por cada 100 ml del total de sangre al 95% de confianza. **(0.25 ptos.)**

GRADO de AGRÍCOLAS : $\boxed{\text{JUNIO 2013}}$

P. 1: X = Cantidad de precipitación

Y = Cantidad de contaminación presente en el aire.

$$\begin{cases} Y = aX + 42.92 \\ r = -0.9 \end{cases}$$

(a): $s_x^2 = 3.91$

$s_y^2 = 2.23$

$$r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{s_{xy}}{\sqrt{3.91} * \sqrt{2.23}} = -0.9$$

$$\Rightarrow s_{xy} = -0.9 * \sqrt{3.91} * \sqrt{2.23} = -2.6577$$

$$\hat{a} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{-2.6577}{3.91} = \boxed{-0.6797}$$

(b): ¿Si $\uparrow X \Rightarrow \uparrow Y$?

No es cierto pues la dependencia es NEGATIVA ($s_{xy} < 0$), con lo cual a mayor X menor Y.

21/

P.2)-

$$\begin{cases} F1 \\ F2 \\ F3 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} p(F1) = 0.25 \\ p(F2) = 0.40 \\ p(F3) = 0.35 \end{array}$$

R ≡ conseguir un rendimiento medio por H por encima de las 45 Tm.

$p(R|F1) = 0.85$

$p(R|F2) = 0.87$

$p(R \cap F3) = 0.32 = p(F3)\, p(R|F3) = 0.35 * p(R|F3)$

$\Rightarrow \quad p(R|F3) = \dfrac{0.32}{0.35} = 0.9143$

(a): $p(R) = p(F1)\, p(R|F1) + p(F2)\, p(R|F2) +$

$+ p(F3)\, p(R|F3) = 0.25 * 0.85 + 0.40 * 0.87 +$

$+ 0.35 * 0.9143 = 0.2125 + 0.348 + 0.32 =$

$= \boxed{0.8805}$

(b): $p(\overline{R}) = 0.1195$

• $p(F1|\overline{R}) = \dfrac{p(F1)\, p(\overline{R}|F1)}{p(\overline{R})} =$

$$= \frac{0.25 * 0.15}{0.1195} = 0.3138$$

▸ $$p(F2/\overline{R}) = \frac{p(F2)\,p(\overline{R}/F2)}{p(\overline{R})} = \frac{0.40 * 0.13}{0.1195} = \boxed{0.4351}$$

▸ $$p(F3/\overline{R}) = \frac{p(F3)\,p(\overline{R}/F3)}{p(\overline{R})} = \frac{0.35 * 0.0857}{0.1195} =$$

$$= 0.2510$$

➜ Es más probable que se haya utilizado F2.

(c): $p(R \cap \overline{F3}) = p[R \cap (F1 \cup F2)] =$

$$= p[\underbrace{(R \cap F1) \cup (R \cap F2)}_{\text{INCOM.}}] =$$

$$= p(R \cap F1) + p(R \cap F2) = p(F1)\,p(R/F1) +$$

$$+ p(F2)\,p(R/F2) = 0.212 + 0.348 = \boxed{0.56}$$

P. 3 : $X \equiv$ Espesor del material

(a): $f(x) = k(8x+1)$ $\quad x = \underset{0.125}{\frac{1}{8}}, \underset{0.25}{\frac{1}{4}}, \frac{3}{8} = 0.375$

x	$1/8$	$1/4$	$3/8$
$f(x)$	$2k$	$3k$	$4k$

$\rightsquigarrow$

x	$1/8$	$1/4$	$3/4$
$f(x)$	$\frac{2}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{4}{9}$

$\rightarrow f(x) \geq 0 \quad \forall x \iff k \geq 0$

$\rightarrow 1 = \sum_x f(x) = 2k + 3k + 4k = 9k \Rightarrow \boxed{k = 1/9}$

(b): $F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\forall t \mid t \leq x} f(t), \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$1/8 \qquad 1/4 \qquad 3/8$

Si $x < 1/8 \Rightarrow F(x) = 0$

Si $1/8 \leq x < 1/4 \Rightarrow F(x) = 2/9$

Si $1/4 \leq x < 3/8 \Rightarrow F(x) = \frac{5}{9}$

Si $x \geq 3/8 \Rightarrow F(x) = 1$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1/8 \\ 2/9, & 1/8 \leq x < 1/4 \\ 5/9, & 1/4 \leq x < 3/8 \\ 1, & x \geq 3/8 \end{cases}}$$

$$E(X) = \sum_{x} x \cdot f(x) = \frac{1}{8} * \frac{2}{9} + \frac{1}{4} * \frac{3}{9} + \frac{3}{8} * \frac{4}{9}$$

$$= \frac{2 + 6 + 12}{8 * 9} = \frac{20}{8 * 9} = \frac{4 \times 5}{2 * 4 * 9} = \frac{5}{18}$$

$$\cong \boxed{0.278}$$

(c) :

$$P(X \leq 0.3 \,/\, X > 0.12) =$$

$$= \frac{P(0.12 < X \leq 0.3)}{P(X > 0.12)} = \frac{f(\frac{1}{8}) + f(\frac{1}{4})}{f(\frac{1}{8}) + f(\frac{1}{4}) + f(3/8)} =$$

$$= \frac{5/9}{1} = 5/9 = \boxed{0.56}$$

P.41 :- ▸ $X \equiv$ Nº de avisos que recibe el servicio de emergencia $\sim Po(\lambda = 3)$

$$\Rightarrow f_X(x) = e^{-3}\frac{3^x}{x!}, \quad x = 0,1,2,3,4,5,6,\ldots$$

▸ $T \equiv$ tiempo transcurrido entre 2 servicios consecutivos $\sim Exp(\lambda = 1/8)$

$$E(T) = 8 = \frac{1}{\lambda}$$

$$\Rightarrow \underbrace{F_T(t) = 1 - e^{-\frac{t}{8}}, \quad t > 0}_{\text{f. distribución de la va } T}$$

▸ Se pueden atender como máximo 5 emergencias / día.

6/

(a): $P(X \geq 6) = 1 - P(X \leq 5) =$

$$= 1 - e^{-3}\left(\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} + \frac{3^2}{2!} + \frac{3^3}{3!} + \frac{3^4}{4!} + \frac{3^5}{5!}\right) =$$

$$= 1 - e^{-3}\left(1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6} + \frac{81}{24} + \frac{243}{120}\right) =$$

$$= 1 - e^{-3} * \frac{(480+540+540+405+243)}{120} =$$

$$= 1 - e^{-3} * 18.4 = \boxed{0.0839}$$

(b): $Y \equiv$ Nº de servicios en 2 días =

$$= X_1 + X_2 \sim Po(\lambda = 6)$$

$$\begin{pmatrix} X_i \sim Po(\lambda = 3) & i = 1,2 \\ \text{IND.} & \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow f_Y(y) = e^{-6}\frac{6^y}{y!}, \quad y = 0, 1, 2, \ldots, 7, 8, 9 \ldots$$

$$P(Y = 8) = e^{-6}\frac{6^8}{8!} = \boxed{0.1033}$$

(c): $P(T \geq 18 / T \geq 10) =$

$$= \frac{P(T \geq 18)}{P(T \geq 10)} = \frac{e^{-\frac{18}{8}}}{e^{-\frac{10}{8}}} = e^{-\frac{18}{8} + \frac{10}{8}} =$$

$$= e^{-1} = \boxed{0.3679}$$

P. 51.-

$X \equiv$ Contenido de azúcar por botella

$E(X) = 24$

$\sigma_X = 1.8$

Especificación del cava "seco" es que

$|X - \mu| \leq 2.88$

(a): Como no conocemos la distribución de prob. de X vamos a utilizar la D. de Tchebychev:

$p(|X-\mu| \leq 2.88) =$

$2.88 = K * \sigma_X = K * 1.8 \Rightarrow K = \frac{2.88}{1.8} = 1.6$

$= p(|X-\mu| \leq 1.6 * 1.8) \geq 1 - \frac{1}{(1.6)^2} =$

$= 0.6094$

$\Rightarrow$ Al menos el 60.94% de las botellas cumplen las especificaciones del cava "seco".

(b) : Sup $X \sim N(\mu = 24, \sigma = 1{,}8)$

$$p(|X-\mu| \leq 2.88) = p(-2.88 \leq X-24 \leq 2.88) =$$

$$= \phi\left(\frac{2.88}{1.8}\right) - \underbrace{\phi\left(\frac{-2.88}{1.8}\right)}_{1-\phi\left(\frac{2.88}{1.8}\right)} =$$

$$= 2\underbrace{\phi(1.6)}_{0.9452} - 1 = \boxed{0.8904}$$

(c) : $Y \equiv$ Nº de botellas que verifican los especificaciones del cava "seco" en una muestra de 6 botellas $\sim B(n=6, p=0.8904)$

$$f(y) = \binom{6}{y} 0.8904^{y}\, 0.1096^{6-y}, \quad y = 0,1,2,3,4,5,6$$

$$P(Y \geq 5) = \binom{6}{5} 0.8904^{5}\, 0.1096^{1} +$$

$$+ \binom{6}{6} 0.8904^{6}\, 0.1096^{0} =$$

$$= 6 * 0.8904^{5} * 0.1096 + 0.8904^{6} =$$

$$= \boxed{0.8664}$$

(b.3): $T \equiv$ Nº de botellas que NO verifican el requisito en un total de 1000 botellas $\sim B(n=1000, p=0.1096)$

- $E(T) = n * p = 1000 * 0.1096 = \boxed{109.6}$

- $P(T \leq 90) =$

$$\left.\begin{array}{l} np = 109.6 \\ np(1-p) = 97.58784 \\ \text{si } W \sim N(109.6, \sigma_W = 9.88) \end{array}\right\} \Rightarrow T \approx W$$

$$\cong P(W \leq 90.5) = \phi\left(\frac{90.5 - 109.6}{9.88}\right) =$$

$$= \phi(-1.93) = 1 - \underbrace{\phi(1.93)}_{0.9732} = \boxed{0.0268}$$

P.6:
$X \equiv$ Concentración de calcio por cada 100 ml. del total de sangre $\sim N(\mu, \sigma)$

Datos muestrales: $n = 22$

$$\sum_i x_i = 133$$

$$\sum_i x_i^2 = 825$$

(a): IC al 95% para μ:

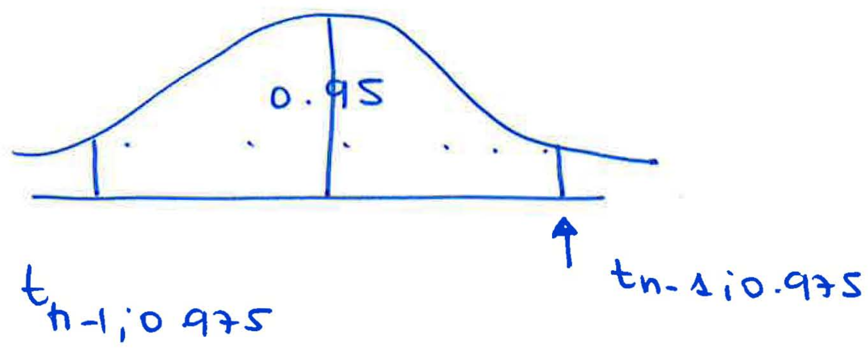
Tomamos $\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

Como σ no la conocemos la estimamos mediante la desviación típica muestral S

$\Rightarrow$ el T. de Fisher nos asegura que la v.a.

$$T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

$\Rightarrow$ $t_{n-1} =$



De donde, $0.95 = p\left(-t_{n-1;0.975} \leq \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{n-1;0.975}\right) =$

Despejando adecuadamente μ

$$= p\left(\bar{X} - t_{n-1;0.975} * \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{n-1;0.975} * \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

10/

El IC al 95% para μ es:

$$\boxed{\bar{x} \pm t_{n-1;0.975} * \frac{S}{\sqrt{n}}}$$

Para nuestra muestra pedida:

$$\bar{x} \pm t_{21;0.975} * \frac{s}{\sqrt{22}} =$$

$$\begin{cases} \bar{x} = \frac{133}{22} = 6.05 \\ s^2 = \frac{n}{n-1}\left(\overline{x^2} - \bar{x}^2\right) = \frac{22}{21}\left(\frac{825}{22} - (6.05)^2\right) = 0.94024 \\ s = 0.97 \end{cases}$$

$$= 6.05 \pm 2.08 * \frac{0.97}{\sqrt{22}} = 6.05 \pm 0.43 =$$

$$= (5.62, 6.48)$$

- Si $\uparrow 1-\alpha \Rightarrow$ Aumenta el margen de error del intervalo $\Rightarrow$ El intervalo se hace más amplio y, por lo tanto, MENOS PRECISO.

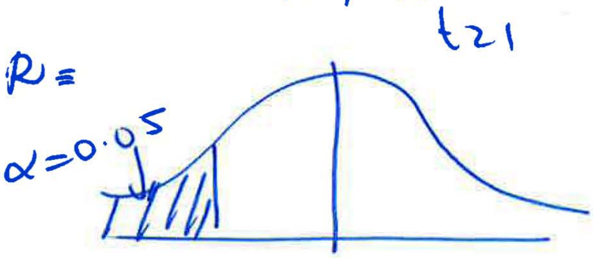
(b): ▸ $H_0: \mu = 6.5$
$H_1: \mu < 6.5$

▸ $\alpha = 0.05$

▸ EST del CONTRASTE bajo H_0:

$$T \equiv \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \; (\equiv t_{21})$$

▸ $R \equiv$



$-t_{21;0.95} = -1.72$

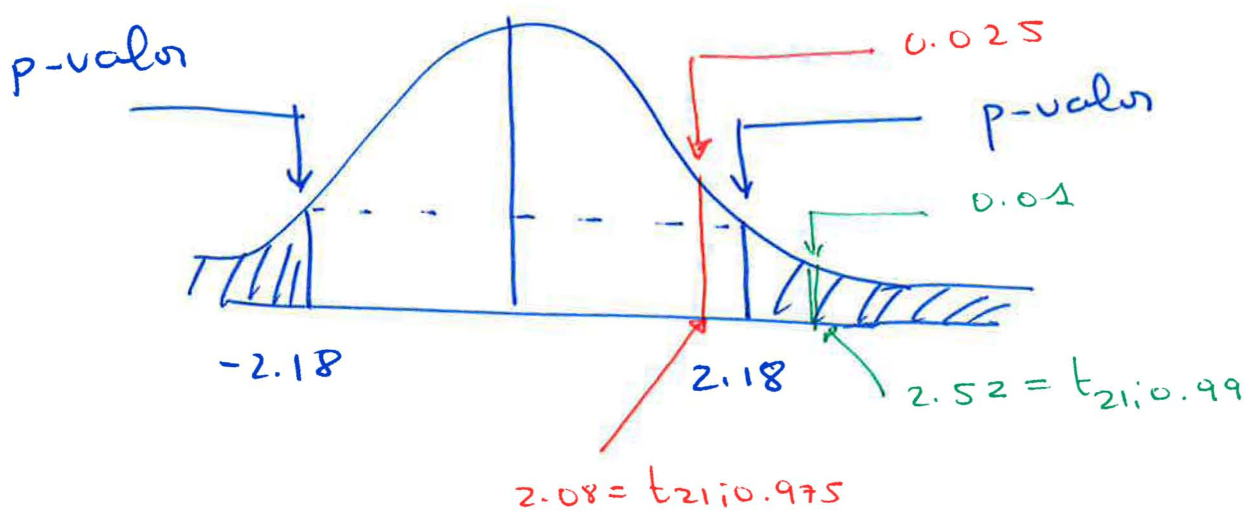
▸ $t_0 \equiv \dfrac{6.05 - 6.5}{0.97/\sqrt{22}} = -2.18 \in R$

$\Rightarrow$ Rechazamos H_0 al 95%

$\Rightarrow$ La concentración media de calcio por cada 100 ml del total de sangre es significativamente menor a 6.5 ml. El paciente no va a tener problemas en la coagulación de la sangre

$\text{p-valor} = P(t_{21} < -2.18)$ 121

t_{21}



$$\Rightarrow \boxed{0.01 < \text{p-valor} < 0.025}$$

(c): Sup $X \sim N(\mu, \sigma = 1)$

¿n / margen de error < 0.35 al 95%?

$$Z_{1-\frac{\alpha}{2}} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < 0.35 \Rightarrow 1.96 \frac{* 1}{\sqrt{n}} < 0.35$$

$$\Rightarrow n \geq \left(\frac{1.96 * 1}{0.35} \right)^2 = 31.36$$

$$\boxed{n = 32 \text{ pruebas}}$$