



NOMBRE:..... APELLIDOS:.....
ESPECIALIDAD:.....

1. **[0.4 puntos]** Se cree que existe una relación de tipo lineal entre la cantidad de cloruro potásico del agua y la profundidad a la que se obtiene el agua. Para analizar esta hipótesis, se obtuvieron 9 mediciones en un pozo a 9 profundidades diferentes en la que se observó la profundidad (en metros) X , anotándose la proporción de cloruro potásico, Y , en cada una de esas 9 profundidades. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

$$\bar{x} = 40 \quad \bar{y} = 8.39 \quad \overline{y^2} = 75.48 \quad \overline{x \cdot y} = 307.56$$

Al final del estudio se decide ajustar una recta de regresión de Y sobre X con la ayuda del programa Rcmdr:

$$Y = b + a * X$$

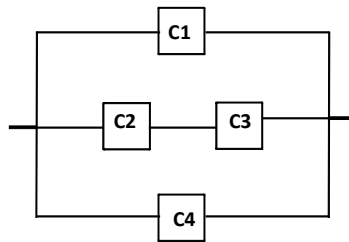
y encontramos que $r = -0.96$. Se pide:

- (a) Determinar el valor de la ordenada en el origen.
(b) Determinar el valor de la pendiente del modelo.
2. **[0.75 puntos]** Una empresa agroalimentaria dispone de tres líneas de envasado de botes de tomate de 1 Kg. El 36% de los botes se envasan en la línea L2 y las líneas L1 y L3 envasan el mismo porcentaje de botes. Por experiencias previas, se sabe que el 3% de los botes de la línea L1 resultan defectuosos (esto es, volumen de envasado incorrecto), el 2% de los botes de la línea L2 también resultan defectuosos. Por otra parte, el 31.2% de los botes son envasados en la línea L3 y no son defectuosos. Si el experimento aleatorio consiste en elegir un bote al azar, se pide:
- (a) Calcular la probabilidad de que el bote no presente un volumen de envasado incorrecto. **(0.25 puntos)**
(b) Si el bote es defectuoso, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido envasado en la línea L2 o la línea L3? **(0.25 puntos)**
(c) Calcular la probabilidad de que el bote no sea defectuoso y haya sido envasado en la línea L2 o la línea L3. **(0.25 puntos)**
3. **[1.15 puntos]** La velocidad (en Km./h.) de los coches que pasan por un determinado punto kilométrico de una carretera es una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{k}, & \text{si } 0 < x < 100 \\ \frac{200 - x}{k}, & \text{si } 100 \leq x \leq 200 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

- (a) Determinar el valor de k para que $f(x)$ sea verdaderamente función de densidad. **(0.25 puntos)**
(b) Obtener la función de distribución asociada a dicha variable. **(0. 25 puntos)**
(c) Calcular la probabilidad $P(X < 135 / X \geq 90)$. **(0.25 puntos)**
(d) En ese punto se encuentra situado un radar que saltará cuando la velocidad sea superior a los 90 Km/h. Si durante una hora han pasado 10 coches por ese punto kilométrico, determinar la probabilidad de que a lo sumo dos vehículos hagan saltar el radar. **(0.4 puntos)**

4. [1.2 puntos] Un vivero vende esquejes de rosal cuya longitud se considera como una variable aleatoria de media 23 cm. y de desviación típica 2.5 cm. Para que el esqueje agarre una vez plantado, su longitud debe de encontrarse en el intervalo [20,26]. Se pide:
- ¿Podrías dar una cota de la probabilidad de que un esqueje de rosal del citado vivero agarre una vez plantado? Razonar la respuesta. (0.25 puntos)
 - Supongamos a partir de ahora, que la longitud de los esquejes de rosal se considera como una variable aleatoria normal de media 23 cm. y de desviación típica 2.5 cm.
 - Determinar la probabilidad de que la longitud de un esqueje de rosal elgido al azar del vivero sea al menos de 20 cm. (0.2 puntos)
 - Un empresa dedicada a la ornamentación de jardines hace un pedido de 81 esquejes de rosal y rechazará el pedido cuando encuentre más de 12 esquejes con una longitud menor de 20 cm. Calcular la probabilidad de rechazar el envío (0.5 puntos)
 - ¿Qué valor debería tener la longitud media de los esquejes de rosal para que al menos el 96% de éstos tengan una longitud por encima de los 20 cm.? (0.25 puntos)
5. [1.3 puntos] Una empresa fabrica una clase de componente electrónico cuyo tiempo de vida, en miles de horas, se comporta como una variable aleatoria exponencial de desviación típica igual a 1.56. Se pide:
- Si un componente electrónico tiene 1900 horas y aún sigue funcionando, determinar la probabilidad de que deje de funcionar antes de las 400 horas siguientes. (0.4 puntos)
 - La empresa suministra cierto sistema que consta de 4 de estos componentes electrónicos que funcionan de manera independiente unos de otros. Determinar la probabilidad de que el sistema funcione al menos 1900 horas sabiendo que tiene el esquema siguiente: (0.5 puntos)



- Estos sistemas pasan un control de calidad para garantizar su buen funcionamiento. El técnico que efectúa el control encuentra que, el número de sistemas que se rechazan a la semana (= 5 días) se puede modelizar como una distribución de Poisson de desviación típica igual a 2. Hallar la probabilidad de que como máximo se rechacen 2 sistemas en un día. (0.4 puntos)
6. [1.25 puntos] La Concejalía de Medio Ambiente del Ayuntamiento de una gran ciudad europea mide el grado de contaminación de la ciudad por un parámetro X . Después de una serie de investigaciones se ha concluido que este parámetro se comporta como una variable aleatoria normal. Para controlar el grado de contaminación se toman medidas diarias, obteniéndose los siguientes valores durante 9 días:

									media muestral	varianza muestral
10.2	10.9	10.5	9.9	10.8	11.2	9.7	10.1	10.3	10.4	0.2425

- Construir razonadamente** un intervalo de confianza al 98% para el grado medio de contaminación de la ciudad. Indicar todos los resultados teóricos necesarios para obtener el citado intervalo. (0.5 puntos)
- ¿Se puede asumir que el grado medio de contaminación de la ciudad es distinto a 10? Responder a esta pregunta planteando el contraste de hipótesis adecuado y tomar una decisión a partir del p – valor de la prueba. Responder razonadamente cuál sería la decisión al 95% y al 99% de confianza. (0.5 puntos)
- Suponiendo ahora conocida la **desviación típica del grado de contaminación de la ciudad**, $\sigma = 0.45$, determinar el tamaño de la muestra mínimo requerido para reducir el margen de error obtenido en el intervalo anterior a 0.16 unidades y garantizando una confianza del 98%. (0.25 puntos)

P.1:

$$\left\{ \begin{array}{l} X \equiv \text{Profundidad en m.} \\ Y \equiv \% \text{ de cloruro potásico} \\ n=9 \end{array} \right.$$

$$\bar{x} = 40$$

$$\bar{y} = 8.39$$

$$\bar{y}^2 = 75.48$$

$$\overline{xy} = 307.56$$

$$\leadsto Y = b + aX$$

$$r = -0.96$$

$$s_y^2 = \frac{n}{n-1} (\bar{y}^2 - \bar{y}^2) = \frac{9}{8} (75.48 - 8.39^2) = 5.7239$$

$$s_{xy} = \frac{n}{n-1} (\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}) = \frac{9}{8} (307.56 - 40 \cdot 8.39) = -31.545$$

\Rightarrow La dependencia entre X e Y es negativa.

$$r = -0.96 = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{-31.545}{\sqrt{5.7239} \cdot s_x} \quad \Rightarrow \quad s_x = \frac{31.545}{0.96 \cdot \sqrt{5.7239}} = 13.735$$

entonces $\hat{a} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{-31.545}{(13.735)^2} = -0.1672$

$$\hat{b} = \bar{y} - \hat{a} \cdot \bar{x} = 8.39 - (-0.1672 \cdot 40) = 15.079$$

$$\boxed{Y = -0.1672X + 15.079}$$

P. 2:

$$L1 \rightarrow p(L1) = \alpha$$

$$L2 \rightarrow p(L2) = 0.36$$

$$L3 \rightarrow p(L3) = \alpha$$

$$\Rightarrow p(L1) = 0.32$$

$$p(L2) = 0.36$$

$$p(L3) = 0.32$$

$$2\alpha + 0.36 = 1 \Rightarrow \alpha = 0.32$$

$$D = \text{Bote defectuoso} \rightarrow p(D/L1) = 0.03$$

$$p(D/L2) = 0.02$$

$$p(\bar{D} \cap L3) = p(L3) p(\bar{D}/L3) = 0.312$$

$$\Rightarrow p(\bar{D}/L3) = \frac{0.312}{p(L3)} = \frac{0.312}{0.32} = 0.975$$

$$p(D/L3) = 0.025$$

$$(a) \div p(\bar{D}) = 1 - p(D) = 1 - 0.0248 = \boxed{0.9752}$$

$$p(D) = \sum_{i=1}^3 p(Li) p(D/Li) = 0.32 * 0.03 +$$

$$+ 0.36 * 0.02 + 0.32 * 0.025 = 0.0248$$

$$(b) \div p(L2 \cup L3 / D) = \frac{p[(L2 \cup L3) \cap D]}{p(D)} =$$

$$\frac{p(L2 \cap D) + p(L3 \cap D)}{p(D)} = \frac{p(L2) p(D/L2) + p(L3) p(D/L3)}{p(D)} =$$

$$= \frac{0.36 * 0.02 + 0.32 * 0.025}{0.0248} = \boxed{0.6129}$$

$$\begin{aligned} (c) &: P(\bar{D} \cap (L2 \cup L3)) = P(\bar{D} \cap L2) + P(\bar{D} \cap L3) = \\ &= P(L2) P(\bar{D} | L2) + P(L3) P(\bar{D} | L3) = \\ &= 0.36 * 0.98 + 0.32 * 0.975 = \boxed{0.6648} \end{aligned}$$

P. 3 :- $X \equiv$ Velocidad en Km/h

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{k}, & 0 < x < 100 \\ \frac{200-x}{k}, & 100 \leq x \leq 200 \\ 0, & \text{resto} \end{cases}$$

$$(a) :- \Delta = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_0^{100} \frac{x}{k} dx + \int_{100}^{200} \frac{(200-x)}{k} dx =$$

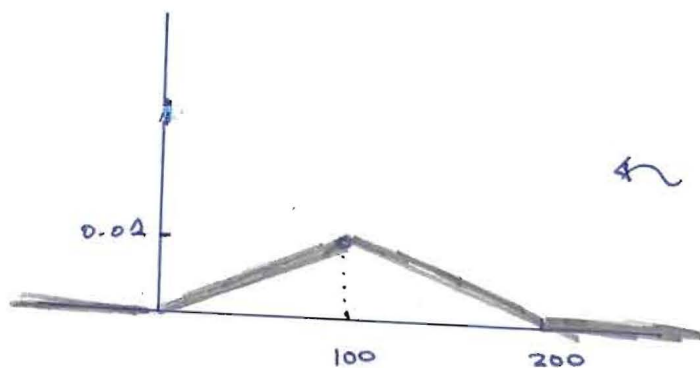
$$= \frac{1}{k} \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^{100} + \frac{1}{k} \left[200x \right]_{100}^{200} - \left. \frac{x^2}{2} \right|_{100}^{200} =$$

$$= \frac{1}{k} \frac{100^2}{2} + \frac{1}{k} \left[200(200-100) - \frac{1}{2} (200^2 - 100^2) \right] =$$

$$= \frac{5000}{k} + \frac{1}{k} (20000 - 15000) = \frac{5000 + 5000}{k} = \frac{10^4}{k}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{k = 10^4}$$

► Veamos si con ese valor de k hace que $f(x)$ sea ≥ 0 :



↳ Veamos $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \forall x \in \mathbb{R}$

$$(b) \text{ :- } F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt, \forall x \in \mathbb{R}$$

Si $x \leq 0$, $F(x) = 0$

Si $0 < x \leq 100$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_0^x \frac{t}{10^4} dt =$
 $= \frac{1}{10^4} \frac{t^2}{2} \Big|_0^x = \frac{x^2}{2 \cdot 10^4}$

Si $100 \leq x \leq 200$, $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_0^{100} \frac{t}{10^4} dt +$
 $+ \int_{100}^x \frac{(200-t)}{10^4} dt = \frac{1}{10^4} \frac{t^2}{2} \Big|_0^{100} + \frac{1}{10^4} \left[200t \Big|_{100}^x - \right.$
 $\left. - \frac{t^2}{2} \Big|_{100}^x \right] = \frac{100^2}{2 \cdot 10^4} + \frac{1}{10^4} \left[200x - 20000 - \right.$
 $\left. - \frac{x^2}{2} + \frac{100^2}{2} \right] = \frac{1}{2} + \frac{1}{10^4} \left(-\frac{x^2}{2} + 200x - 15000 \right) =$
 $= \frac{-x^2}{2 \cdot 10^4} + 0.02x - \frac{1}{2}$

Si $x > 200$, $F(x) = 1$

4/14

Autocorres:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x^2}{2 \times 10^4}, & 0 < x \leq 100 \\ \frac{-x^2}{2 \times 10^4} + 0.02x - \Delta, & 100 \leq x \leq 200 \\ \Delta, & x > 200 \end{cases}$$

$$(c): P(X < 135 \mid X \geq 90) = \frac{P[(X < 135) \cap (X \geq 90)]}{P(X \geq 90)}$$

$$= \frac{P(90 \leq X < 135)}{1 - P(X < 90)} = \frac{F(135) - F(90)}{1 - F(90)} =$$

$$= \frac{0.78875 - 0.405}{1 - 0.405} = \boxed{0.64496}$$

$$F(90) = \frac{90^2}{2 \times 10^4} = 0.405$$

$$F(135) = \frac{-135^2}{2 \times 10^4} + 0.02 \times 135 - \Delta = 0.78875$$

(d) = $Y \equiv N^{\circ}$ de coches que hacen saltar el radar en un total de 10 coches

$$NB(n=10, p=P(X > 90) = 1 - 0.405 = 0.595)$$

$$Y = \underline{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}$$

$$P(Y \leq 2) =$$

$$\begin{aligned}
&= \binom{10}{0} 0.595^0 0.405^{10} + \binom{10}{1} 0.595^1 0.405^9 + \\
&+ \binom{10}{2} 0.595^2 0.405^8 = \\
&= 0.405^8 \left(0.405^2 + 10 * 0.595 * 0.405 + 45 * 0.595^2 \right) = \\
&= \boxed{0.0134}
\end{aligned}$$

P. 4: $X \equiv$ longitud del esquireje $\rightarrow \mu = E(X) = 23 \text{ cm}$
 $\sigma_X = 2.5 \text{ cm}$.

$$(a): P(X \in [20, 26]) = P(|X - \mu| \leq 3) \geq$$

$$3 = k * \sigma_X \Rightarrow k = \frac{3}{2.5} = 1.2$$

$$\geq 1 - \frac{1}{(1.2)^2} = \boxed{0.3056}$$

Aplicando la D. de Tchebychev pero no conocemos la distribución de probabilidad de la v.a.

X .

$$(b) = \text{Sup. } X \sim N(\mu = 23, \sigma = 2.5)$$

$$\begin{aligned}
(b.1) : P(X \geq 20) &= 1 - \Phi\left(\frac{20-23}{2.5}\right) = \\
&= 1 - \Phi(-1.2) = \Phi(1.2) = \boxed{0.8849}
\end{aligned}$$

(b.2) : $Y \equiv X^c$ de esgrijes con una longitud inferior a 20 cm. en un total de 84 esgrijes $\sim B(n=84, p=0.1151)$

$$P(\text{Rechazar el pedido}) = P(Y > 12) =$$

$$\left\{ \begin{array}{l} np = 84 * 0.1151 = 9.3234 \\ np(1-p) = 84 * 0.1151 * 0.8849 = 8.25 \rightarrow \sigma_w = 2.87 \\ \text{Si } W \sim N / \mu_w = 9.3234, \sigma_w = 2.87 \text{ tenemos} \\ \text{que } Y \approx W \end{array} \right.$$

$$\approx P(W \geq 12.5) = 1 - \Phi\left(\frac{12.5 - 9.3234}{2.87}\right) =$$

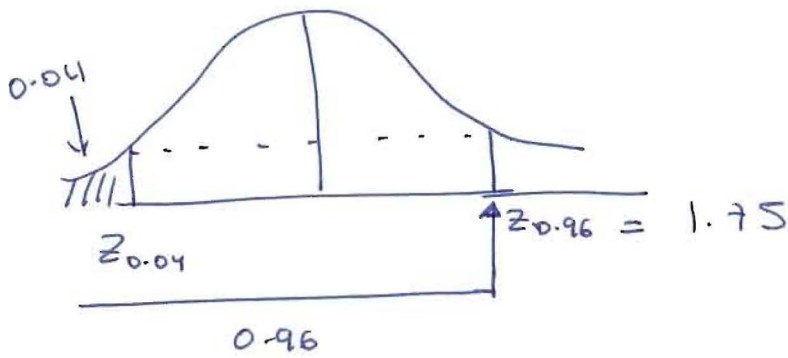
$$= 1 - \Phi(1.11) = 1 - 0.8665 = \boxed{0.1335}$$

(b.3) : $\hat{\mu} / P(X > 20) = 0.96 ?$

$$0.96 = P(X > 20) = 1 - \Phi\left(\frac{20 - \mu}{2.5}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Phi\left(\frac{20 - \mu}{2.5}\right) = 0.04$$

$$\Rightarrow Z_{0.04} = \frac{20 - \mu}{2.5}$$



$$\Rightarrow z_{0.04} = -z_{0.96} = -1.75 = \frac{20 - \mu}{2.5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu = 20 + 1.75 \times 2.5 = \boxed{24.375 \text{ cm}}$$

P.S.: $X \equiv$ Tiempo de vida del comp. electrónico $\sim \text{Exp}(\lambda = \frac{1}{1.56})$ en 10^3 h.

$$E(X) = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \Rightarrow \sigma_X = \frac{1}{\lambda} = 1.56 \Rightarrow \boxed{\lambda = \frac{1}{1.56}}$$

$$\Rightarrow F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{1.56}}, & x > 0 \end{cases}$$

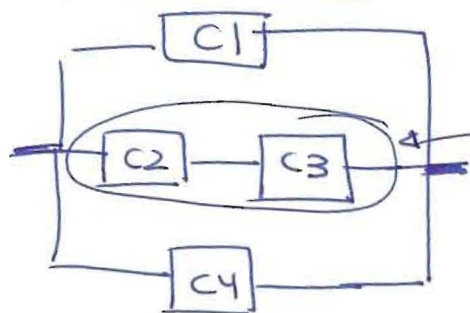
F. DISTRIBUCIÓN de X

$$(a) \text{:- } P(X \leq 2.3 \mid X > 1.9) = \frac{P(1.9 < X < 2.3)}{P(X > 1.9)} =$$

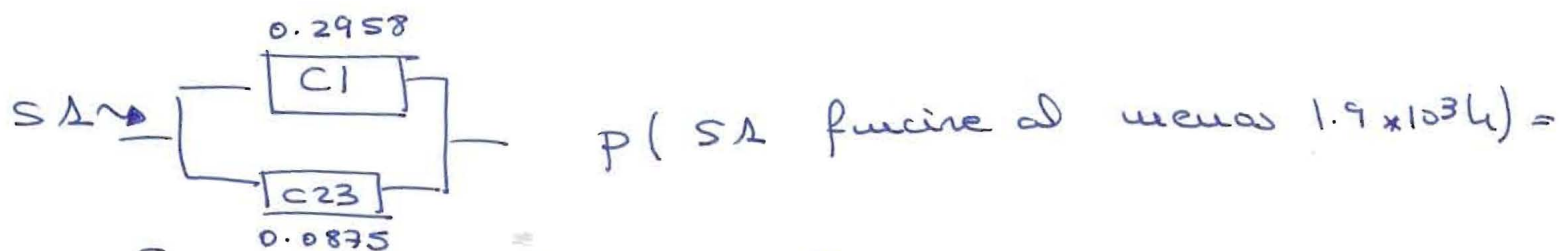
$$= \frac{P(1.9 < X < 2.3)}{1 - P(X \leq 1.9)} = \frac{F(2.3) - F(1.9)}{1 - F(1.9)} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(1 - e^{-\frac{2.3}{1.56}}) - (1 - e^{-\frac{1.9}{1.56}})}{1 - (1 - e^{-\frac{1.9}{1.56}})} = \\
 &= \frac{e^{-\frac{1.9}{1.56}} - e^{-\frac{2.3}{1.56}}}{e^{-\frac{1.9}{1.56}}} = 1 - e^{-\frac{2.3+1.9}{1.56}} = \\
 &= 1 - e^{-\frac{0.4}{1.56}} = \boxed{0.2263}
 \end{aligned}$$

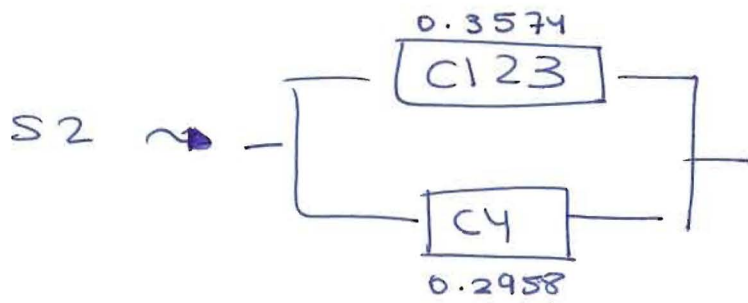
(b) : $\frac{P(X > 1.9)}{P(C_i \geq 1.9) \text{ con } i=1,2,3,4} = e^{-\frac{1.9}{1.56}} = \boxed{0.2958}$



$$\begin{aligned}
 P[(C_2 \geq 1.9) \cap (C_3 \geq 1.9)] &= \text{IND} \\
 &= (0.2958)^2 = 0.0875
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &P(SA \text{ funcione al menos } 1.9 \times 10^3 h) = \\
 &= P[(C_1 \geq 1.9) \cup (C_{23} \geq 1.9)] = \\
 &= P(C_1 \geq 1.9) + P(C_{23} \geq 1.9) - P(C_1 \geq 1.9) * P(C_{23} \geq 1.9) = \\
 &= 0.2958 + 0.0875 - 0.2958 * 0.0875 = 0.3574
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 &P(S2 \text{ funciona d menos } 1.9 \times 10^3 \text{ h}) = \\
 &= P\left[\overline{(C123 \geq 1.9)} \cup (C4 \geq 1.9)\right] = \\
 &= P(C123 \geq 1.9) + P(C4 \geq 1.9) - P(C123 \geq 1.9) * P(C4 \geq 1.9) = \\
 &= 0.3574 + 0.2958 - 0.3574 * 0.2958 = \\
 &= \boxed{0.5475}
 \end{aligned}$$

(c) - Sea $Y = N^\circ$ de sistemas que se rechazan en 5 días $\sim P_0(d=4)$

$$E(Y) = \lambda$$

$$\sqrt{\text{Var}(Y)} = \lambda \Rightarrow \sigma_Y = \sqrt{\lambda} = 2 \Rightarrow \boxed{\lambda = 4}$$

$\Rightarrow T \equiv N^\circ$ de sistemas que se rechazan en 1 día $\sim P_0(d = \frac{4}{5})$

$$\Rightarrow f(t) = e^{-4/5} \frac{(4/5)^t}{t!}, \quad t = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots$$

$$P(T \leq 2) = e^{-4/5} \left(\frac{(4/5)^0}{0!} + \frac{(4/5)^1}{1!} + \frac{(4/5)^2}{2!} \right) =$$

$$= e^{-0.8} \left(1 + 0.8 + \frac{0.8^2}{2} \right) = \boxed{0.9523}$$

P.6: $X \equiv$ Grado de contaminación de la ciudad $N(N/\mu, \sigma)$

$$n = 9 \rightarrow \bar{X} = 10.4$$

$$s_x^2 = 0.2425$$

(a): IC al 98% para μ :

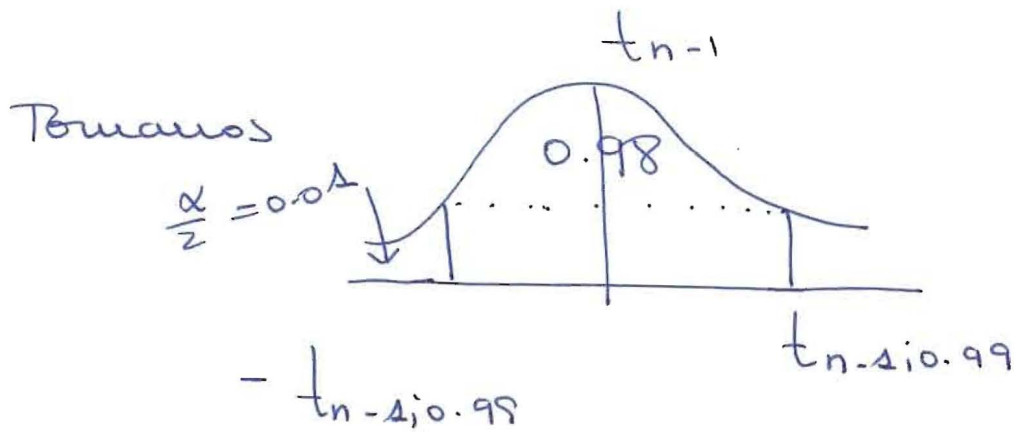
Queremos estimar $\mu \rightarrow$ Tomamos la $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ ya que la distribución de X es un modelo usual σ el modelo usual es aditivo.

$$\Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$$

Como σ es desconocida la estimamos mediante la desviación típica muestral, S

$$\Rightarrow \text{La v.a. } T \equiv \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

aplicando el TI de Fisher.



y se cumple que

$$0.98 = P\left(-t_{n-1; 0.99} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \leq t_{n-1; 0.99}\right) =$$

Despejamos a desvaadamente μ

$$= P\left(\bar{X} - t_{n-1; 0.99} * \frac{s}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{n-1; 0.99} * \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

\Rightarrow el IC al 98% para μ toma la

forma: $\bar{X} \pm t_{n-1; 0.99} * \frac{s}{\sqrt{n}}$

\forall , para nuestra muestra, tomamos la

forma: $\bar{x} \pm t_{8; 0.99} * \frac{s}{\sqrt{9}} =$

$$= 10.4 \pm 2.9 * \frac{\sqrt{0.2425}}{\sqrt{9}} =$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{0.476}$$

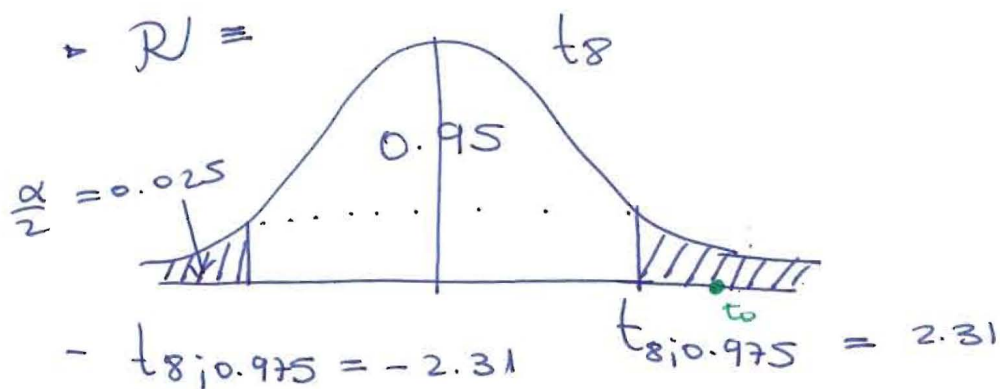
$$= (9.924, 10.876)$$

(b) : $H_0: \mu = 10$
 $H_1: \mu \neq 10$] contraste BILATERAL

▶ $\alpha = 0.05$

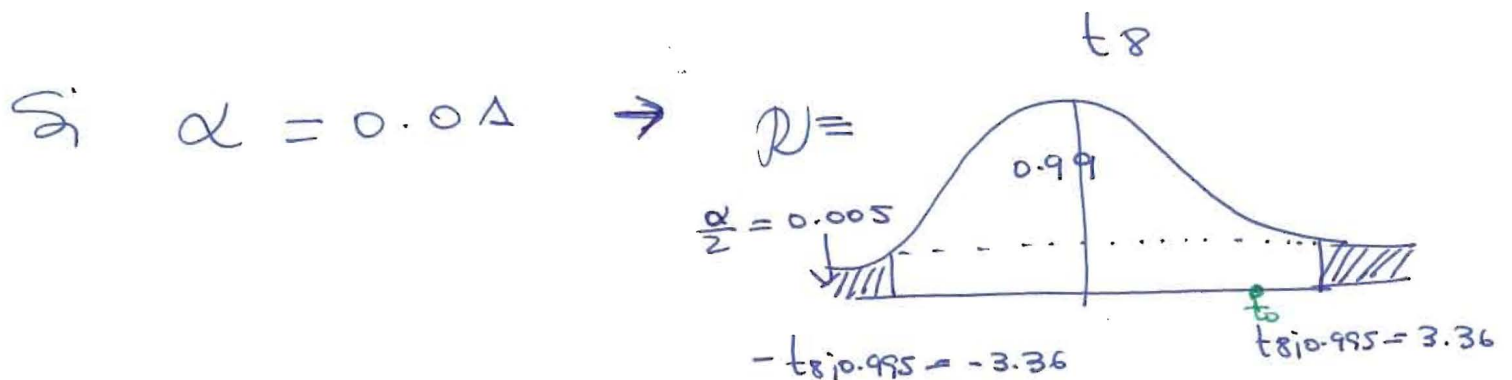
▶ EST. del CONTRASTE bajo H_0 :

$$T \equiv \frac{\bar{X} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} (\equiv t_8)$$



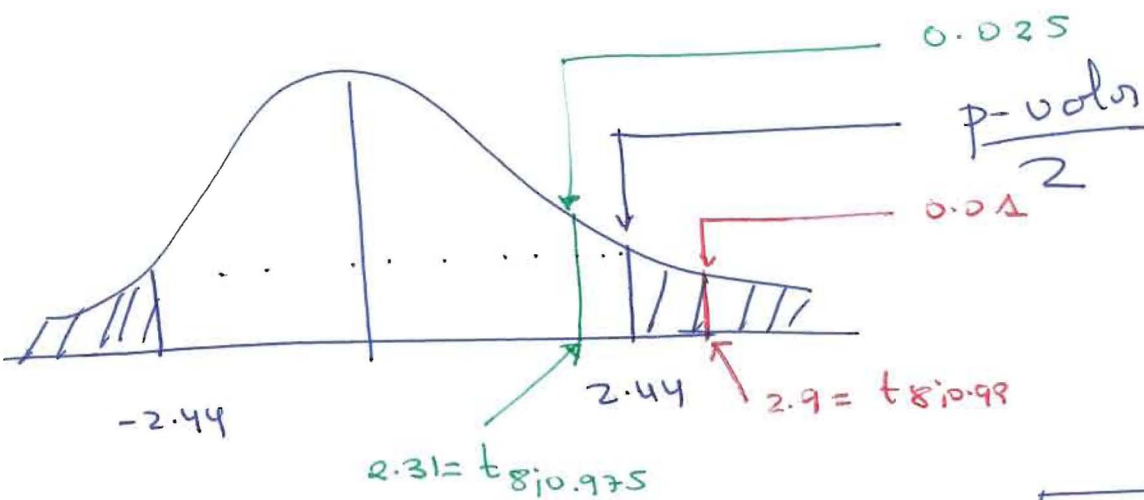
▶ $t_0 \equiv \frac{10.4 - 10}{\sqrt{0.2425}/\sqrt{9}} \equiv 2.44 \in R \Rightarrow$ Rechazamos H_0 al 95% de confianza

\Rightarrow El grado de contaminación medio no es significativamente igual a 10.



$t \notin R \Rightarrow$ No podemos rechazar H_0 al 99% de confianza y la conclusión de tipo no estadístico sería al contrario.

$$\Rightarrow p\text{-valor} = 2P(t_8 > |2.44|)$$



$$\Rightarrow 0.01 < \frac{p\text{-valor}}{2} < 0.025 \Rightarrow \boxed{0.02 < p\text{-valor} < 0.05}$$

Por eso, al 95% rechazamos H_0 (notar que el $p\text{-valor} < 0.05$) y al 99% no podemos rechazar H_0 (notar que $p\text{-valor} > 0.01$)

(c) = Sup $X \sim N(\mu, \sigma = 0.45)$

donde $Z_{1-\frac{\alpha}{2}} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.16$ al 98%

$$\Rightarrow Z_{0.99} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.16 \Rightarrow 2.33 * \frac{0.45}{\sqrt{n}} = 0.16$$

$$\Rightarrow n > \left(\frac{2.33 * 0.45}{0.16} \right)^2 \Rightarrow \boxed{n=43} \quad 14/14$$