Dpto. Matemática Aplicada y Estadística

Grado en IIAA y Grado en IHJ
Asignatura: **Estadística Aplicada. Curso 2013-2014**
JUNIO 2014

NOMBRE:..**APELLIDOS:**..
ESPECIALIDAD:...

1. [**0.5 puntos**] Un cibercafé ubicado junto al campus universitario está estudiando la relación existente entre los ingresos mensuales (Y en miles de euros) y los gastos en publicidad (X en cientos de euros). Para ello, observa durante los últimos 24 meses los ingresos mensuales y los gastos en publicidad y obtiene la siguiente información muestral:

$$\sum x_i = 60 \qquad \sum x_i^2 = 186.8 \qquad \sum y_i = 81.6 \qquad \sum y_i^2 = 298.14$$

Al final del estudio se decide ajustar una recta de regresión de Y sobre X con la ayuda del programa Rcmdr:

$$Y = 1.5875 + a * X$$

   (a) Determinar el valor de la pendiente del modelo, esto es, del parámetro a. (**0.25 puntos**)
   (b) Determinar el coeficiente de correlación entre los ingresos mensuales y los gastos en publicidad. **(0.25 puntos)**

2. [**0.75 puntos**] Se utilizan tres líneas de producción (L1, L2 y L3) para empaquetar azúcar en bolsas de 1 kg.. La línea L1 produce un tercio de las bolsas que producen las otras dos líneas juntas y la línea L2 y L3 tiene el mismo volumen de producción. Todas las bolsas producidas pasan un control de calidad y se encuentra que el 3% de las bolsas de la línea L1 no pasan el test de calidad y el 1% de las bolsas de la línea L3 tampoco pasan el test de calidad. Por otra parte, el 36% de las bolsas son empaquetadas por la línea L2 y pasan el test de calidad. Se pide:

   (a) Calcular la probabilidad de que una bolsa de azúcar elegida al azar no pase el test de calidad. (**0.25 puntos**)
   (b) Si una bolsa de azúcar pasa el test de calidad, ¿en qué línea es mas probable que se haya empaquetado y con qué probabilidad? (**0.25 puntos**)
   (c) Determinar la probabilidad de que una bolsa de azúcar pase el test de calidad y se haya empaquetado en la línea L1 o en la línea L3. (**0.25 puntos**)

3. [**1.25 puntos**] El espesor, en mm., del laminado que cubre una superficie de madera es una v.a. X cuya función de distribución viene dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x^3}{6}, & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ \dfrac{x^2+2}{\beta}, & \text{si } 1 < x < 4 \\ 1, & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

Se pìde:

   (a) Determinar el valor de β para que $F(x)$ sea verdaderamente una función de distribución. **(0.25 puntos)**
   (b) Determinar la función de densidad asociada a la v.a. X. **(0.25 puntos)**
   (c) Determinar la probabilidad de que el espesor del laminado sea mayor a 0.64 mm. y menor a 4.28 mm. **(0.5 puntos)**

(d) Supongamos ahora que no conocemos la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X pero sí conocemos su media, $\mu = 2.46$ mm., y su desviación típica, $\sigma = 1.07$ mm., ¿podrías dar una cota para la probabilidad de que el espesor del laminado sea mayor a 0.64 mm. y menor a 4.28 mm.? Razonar la respuesta. **(0.25 puntos)**

4. [**0.75 puntos**] Las erratas encontradas en cada página de informe se puede modelizar como una distribución de Poisson de parámetro λ. Se pide:

   (a) Determinar el valor del parámetro λ sabiendo que la probabilidad de no encontrar errata alguna en un página es 0.6065. **(0.25 puntos)**

   (b) En base de experiencia previa podemos ajustar el valor de λ igual a 0.5. Si la norma de calidad obliga a repetir el informe cuando hay 3 o más erratas en 4 páginas de informe, determinar el porcentaje de informes que hay que repetir **(0.5 puntos)**

5. [**1.5 puntos**] La vida útil de cierto tipo de aparato de refrigeración puede considerarse como una variable aleatoria exponencial de media 8 años. Se pide:

   (a) ¿Cuál es la probabilidad de que un aparato de refrigeración dure al menos 12 años? **(0.20 puntos)**

   (b) ¿Cuál debe de ser el tiempo de garantía que deben tener dichos aparatos de refrigeración si se desea que como mucho el 25% de éstos fallen antes de que expire su garantía? **(0.30 puntos)**

   (c) Si un aparato de refrigeración tiene 10 años y no ha fallado, ¿cuál es la probabilidad de que no falle antes de que pase un año más? **(0.20 puntos)**

   (d) Si tomamos 6 de estos aparatos al azar, determinar la probabilidad de que al menos 5 de ellos tengan una vida útil por encima de 12 años. **(0.40 puntos)**

   (e) Una tienda de electrodomésticos compra un lote de 50 aparatos de refrigeración, ¿cuál es la probabilidad de que más de 35 de ellos fallen antes de los 12 años de vida? **(0.40 puntos)**

6. [**1.25 puntos**] Una empresa ganadera examina una nueva dieta alimenticia para el engorde de granívoros con la que espera conseguir que el peso medio de los animales sea superior a 205 gramos. Con objeto de efectuar tal comprobación, se seleccionaron al azar 8 animales alimentados con la nueva dieta y se obtiene los siguientes resultados:

								media muestral	**varianza muestral**
178	225	241	250	225	227	225	203	221.75	499.07

   Suponiendo que el peso (en gramos) de los animales con esta nueva dieta sigue una distribución normal, se pide:

   (a) **Construir razonadamente** un intervalo de confianza al 98% para el peso medio de los animales con la nueva dieta. Indicar todos los resultados teóricos necesarios para obtener el citado intervalo. (**0.5 puntos**)

   (b) ¿Se puede asumir que el peso medio de los animales con la nueva dieta es significativamente superior a los 205 gramos? Responder a esta pregunta planteando el contraste de hipótesis adecuado y tomar una decisión a partir del $p-valor$ de la prueba. Responder razonadamente cuál sería la decisión al 95% y al 99% de confianza. (**0.5 puntos**)

   (c) Suponiendo ahora conocida la **desviación típica del peso de los animales con la nueva dieta**, $\sigma = 21.85$ gramos, determinar el tamaño de la muestra mínimo requerido para reducir el margen de error obtenido en el intervalo anterior a 8 gramos y garantizando una confianza del 98%. (**0.25 puntos**)

Grado de Industriales y Montes

JUNIO 2014

1/11

P.1|:
$$\begin{cases} Y \equiv \text{Ingresos mes } 10^3 \text{ €} \\ X \equiv \text{Gastos en publicidad } 10^2 \text{ €} \end{cases}$$

$$\sum x_i = 60 \longrightarrow \bar{x} = \frac{60}{24} = 2.5$$

$$\sum y_i = 81.6 \longrightarrow \bar{y} = \frac{81.6}{24} = 3.4$$

$$\sum x_i^2 = 186.8 \longrightarrow s_x^2 = \frac{24}{23}\left(\frac{186.8}{24} - 2.5^2\right) = 1.6$$

$$\sum y_i^2 = 298.14 \longrightarrow s_y^2 = \frac{24}{23}\left(\frac{298.14}{24} - 3.4^2\right) = 0.9$$

$$Y = 1.5875 + aX$$

(a):- $\hat{b} = \bar{y} - \hat{a} \cdot \bar{x} = 3.4 - \hat{a} \cdot 2.5 = 1.5875$

$$\Rightarrow \hat{a} = \frac{3.4 - 1.5875}{2.5} = \boxed{0.725}$$

(b):- $r = \frac{s_{xy}}{s_x \cdot s_y} = \frac{s_{xy}}{\sqrt{1.6 * 0.9}} = \frac{1.16}{\sqrt{1.6 * 0.9}} = \boxed{0.967}$

$$\hat{a} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} = \frac{s_{xy}}{1.6} = 0.725 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s_{xy} = 0.725 * 1.6 = 1.16$$

P.21 : $\left\{\begin{array}{l} L1 \to p(L1)=\alpha \\ L2 \to p(L2)=\beta \\ L3 \to p(L3)=\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow$ $\alpha+\beta+\gamma=1$, $\beta=\gamma$, $\alpha=\frac{1}{3}(\beta+\ldots)=\frac{1}{3}(\beta+\beta)=\cancel{\frac{2}{3}}$ $=\frac{2}{3}\beta$

2/10

$\Rightarrow \frac{2}{3}\beta+\beta+\beta = \frac{8}{3}\beta = 1 \Rightarrow \boxed{\beta = \frac{3}{8} = \gamma}$

$\boxed{\alpha = \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\,\frac{\cancel{3}}{\cancel{8}_4} = \frac{1}{4}}$

$\left\{\begin{array}{l} T \equiv \text{Pasar el test de calidad} \\ p(\overline{T} \mid L1) = 0.03 \\ p(\overline{T} \mid L3) = 0.01 \\ p(T \cap L2) = 0.36 = p(L2)\, p(T/L2) = \frac{3}{8}\, p(T/L2) \\ \Rightarrow p(T/L2) = \frac{0.36 * 8}{3} = 0.96 \to p(\overline{T}/L2) = 0.04 \end{array}\right.$

(a) : $p(\overline{T}) = \sum_{i=1}^{3} p(Li)\, p(\overline{T} \mid Li) =$

$= \frac{1}{4} * 0.03 + \frac{3}{8} * 0.04 + \frac{3}{8} * 0.01 = \frac{0.06+0.12+0.03}{8} =$

$= \frac{0.21}{8} = \boxed{0.02625}$

$p(T) = 0.97375$

3/10

(b): ▸ $p(L1|T) = \frac{p(L1)\,p(T|L1)}{p(T)} = \frac{1/4 * 0.97}{0.97375} = \boxed{= 0.2490}$

▸ $p(L2|T) = \frac{p(L2)\,p(T|L2)}{p(T)} = \frac{\frac{3}{8} * 0.96}{0.97375} = \boxed{0.3697}$

▸ $p(L3|T) = \frac{p(L3)\,p(T|L3)}{p(T)} = \frac{\frac{3}{8} * 0.99}{0.97375} = \boxed{0.3813}$

⇒ en la línea L3 y con una probabilidad de 0.3813.

(c): $p[T \cap (L1 \cup L3)] = p[(T \cap L1) \cup (T \cap L3)] =$ incompatibles

$= p(T \cap L1) + p(T \cap L3) = p(L1)\,p(T|L1) +$

$+ p(L3)\,p(T|L3) = \frac{1}{4} * 0.97 + \frac{3}{8} * 0.99 = \frac{1.94 + 2.97}{8} =$

$= \boxed{0.61375}$

P.3): $X \equiv$ Espesor de la lámina

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^3/6, & 0 \le x \le 1 \\ \frac{x^2+2}{18}, & 1 < x < 4 \\ 1, & x \ge 4 \end{cases}$$

(a) : F(x) continua en $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ 4/10

$$\Leftrightarrow \boxed{x=1}\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} F(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3}{6} = \dfrac{1}{6} = F(1) \\[2ex] \lim\limits_{x\to 1^+} F(x) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+2}{\beta} = \dfrac{3}{\beta} \end{array}\right] \Rightarrow \\[4ex] \Rightarrow \dfrac{1}{6} = \dfrac{3}{\beta} \Leftrightarrow \boxed{\beta = 18} \end{array}\right.$$

$\boxed{x=4}$ Veamos si para $\beta=18$ la función es continua en $x=4$:

$$\lim_{x\to 4^+} F(x) = F(4) = 1$$

$$\lim_{x\to 4^-} F(x) = \lim_{x\to 4} \frac{x^2+2}{18} = \frac{16+2}{18} = 1$$

Iguals

(b) : $\forall x$ en los que existe la derivada de F(x) se tiene que $F'(x) = f(x)$

$$\Rightarrow \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2}{6} = \dfrac{x^2}{2}, & 0 \leq x \leq 1 \\[2ex] \dfrac{2x}{18} = \dfrac{x}{9}, & 1 < x < 4 \\[2ex] 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

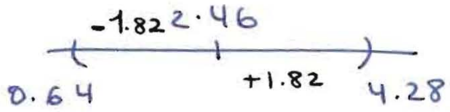
(c): $P(0.64 < X < 4.28) = F(4.28) - F(0.64) =$

$= 1 - \dfrac{0.64^3}{6} = 1 - 0.0437 = \boxed{0.9563}$

5/10

(d): $X \sim \quad E(X) = 2.46$

$\sigma_X = 1.07$



$P(0.64 \leq X \leq 4.28) = P(|X - 2.46| \leq 1.82) \geq 1 - \dfrac{1}{(1.7)^2} =$

$\left(K * \sigma_X = K * 1.07 \;\Big|\; \Rightarrow K = \dfrac{1.82}{1.07} = 1.7 \right)$

$= \boxed{0.6540}$ Utilizamos la D. de Tchebychev pues en este apartado NO conocemos la dist. de prob. de la v.a. X

P.4): $X \equiv$ Nº de erratas en 1 PÁGINA

$\sim P_o(\lambda) \Rightarrow f(x) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^x}{x!}, \; x = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots$

(a): $P(X = 0) = f(0) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^0}{0!} = 0.6065 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{-\lambda} = 0.6065 \Rightarrow -\lambda = \ln(0.6065) = -0.5$

$\Rightarrow \boxed{\lambda = 0.50}$

(b): $Y \equiv$ Nº de erratas en 4 páginas

de informe $= X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \sim$

$\sim Po(\lambda = 4 * 0.5 = 2)$ y a que cada $X_i \sim Po(\lambda = 0.5)$
$i = 1, 2, 3, 4$ y son IND.

6/10

$$\Rightarrow f_Y(y) = e^{-2}\frac{2^y}{y!}, \quad \underbrace{y = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots}_{\to\; Y \geq 3}$$

$$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2) = 1 - e^{-2}\left(\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!}\right) =$$

$$= 1 - e^{-2}\left(1 + 2 + \frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}}\right) = 1 - 5 * e^{-2} = \boxed{0.3233}$$

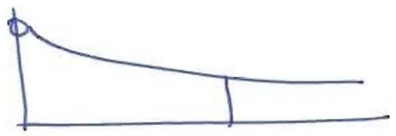
P.5): $X \sim Exp(\lambda = 1/8)$

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = 8 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \underbrace{F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{8}}, & x > 0 \end{cases}}_{\text{F. Distribución de la v.a. } X}$$

(a): $P(X \geq 12) = e^{-\frac{12}{8}} = e^{-1.5} = \boxed{0.2231}$

(b):



α

¿ $\alpha \mid \underbrace{P(X \leq \alpha)}_{F(\alpha) = 1 - e^{-\frac{\alpha}{8}}} = 0.25$?

$$\Rightarrow 1 - e^{-\frac{\alpha}{8}} = 0.25 \Rightarrow e^{-\frac{\alpha}{8}} = 0.75 \Rightarrow -\frac{\alpha}{8} = \ln(0.75)$$

$$\Rightarrow \alpha = (-8) * \ln(0.75) = 2.3 \Rightarrow \boxed{\alpha = 2.3 \text{ años}}$$

(c): $P(X \geq 11 \mid X \geq 10) = \dfrac{P[(X \geq 11) \cap (X \geq 10)]}{P(X \geq 10)} =$

$$= \frac{P(X \geq 11)}{P(X \geq 10)} = \frac{e^{-11/8}}{e^{-10/8}} = e^{-\frac{11}{8} + \frac{10}{8}} = e^{-1/8} = \boxed{0.8825}$$

(d): $Y \equiv$ Nº de aparatos que tienen una vida útil por encima de los 12 años en un total de 6 aparatos

$$\sim B(n = 6, p = 0.2231).$$

7/1[illegible]

$$\Rightarrow \quad f(y) = \binom{6}{y} 0.2231^{y} \; 0.7769^{6-y} \quad , y = 0,1,2,3,4,5,$$

$$P(Y \geq 5) = \binom{6}{5} 0.2231^{5} \; 0.7769^{1} + \binom{6}{6} 0.2231^{6} \; 0.7769^{0}$$

$$= 0.2231^{5} \left(6 * 0.7769 + 0.2231 \right) = \boxed{0.0027}$$

(e): $T \equiv$ Nº de aparatos que fallan antes de los 12 años en un total de 50

$\sim B(n = 50, \; p = 0.7769)$

$$P(T > 35) \cong P(W \geq 35.5) =$$

$$\begin{cases} np = 38.845 \\ np(1-p) = 8.6663195 \rightarrow \sigma_w = 2.94 \\ \text{si } W \sim N(\mu = 38.845, \sigma_w = 2.94) \end{cases} \Rightarrow T \approx W$$

$$= 1 - \phi\left(\frac{35.5 - 38.845}{2.94} \right) = 1 - \phi(-1.14) =$$

$$= \phi(1.14) = \boxed{0.8729}$$

P.6) : $X \equiv$ Peso, en gramos, de los animales con la nueva dieta $\sim N(\mu, \sigma)$

$n = 8 \longrightarrow \bar{x} = 221.75$

$s_x^2 = 499.07$

(a): IC al 98% para μ:

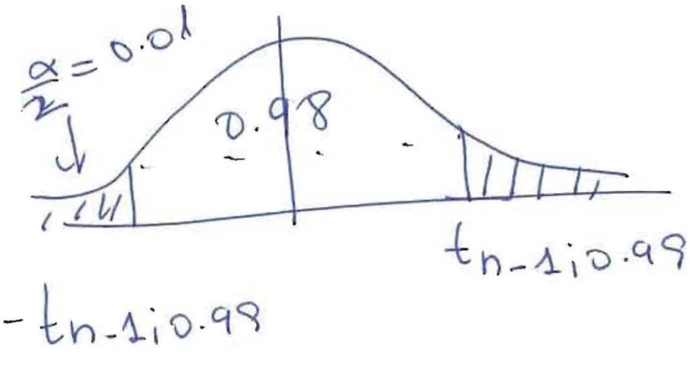
- Tomamos la $\bar{X} \sim N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ por la aditividad de la dist. normal $\Rightarrow Z = \dfrac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

Como σ es desconocida, la estimamos mediante la desviación típica muestral S

$\Rightarrow$ Por el Tª de Fisher tenemos que la v.a

$$T \equiv \frac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$$

- En la t_{n-1}, tomamos los ptos,



y tenemos que $0.98 = p\left(-t_{n-1;0.99} \leq \dfrac{\bar{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \leq t_{n-1;0.99}\right) =$

$\Downarrow$ Despejamos μ

$$= P\left(\bar{X} - t_{n-1;0.99} * \frac{S}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{n-1;0.99} * \frac{S}{\sqrt{n}}\right) \; 9/$$

$\Rightarrow$ El IC al 98% para μ es:

$$\bar{X} \pm t_{n-1;0.99} * \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Y, para nuestra muestra, ~~toma~~ la forma:

$$\bar{X} \pm t_{7;0.99} * \frac{S}{\sqrt{n}} \equiv 221.75 \pm \underbrace{3 * \frac{\sqrt{499.07}}{\sqrt{8}}}_{23.70} =$$

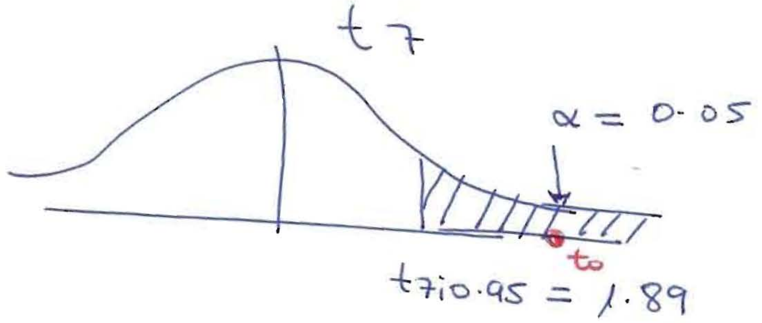
$$\boxed{= (221.05, 222.45)}$$

(b):

- $H_0: \mu = 205$
- $H_1: \mu > 205$
- $\alpha = 0.05$
- EST del CONTRASTE bajo H_0:

$$T \equiv \frac{\bar{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1} \; (\equiv t_7)$$

- RJ

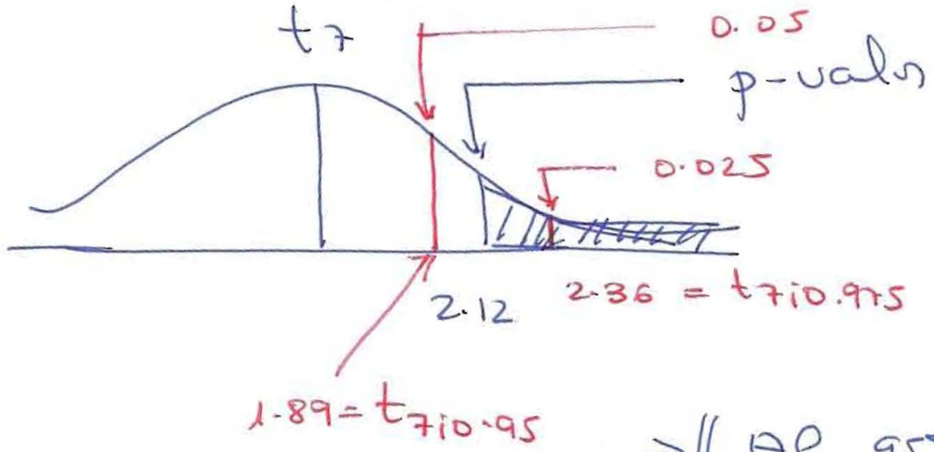


$$T_0 \cong \frac{221.75 - 205}{\sqrt{499.07/8}} \cong 2.12 \in R \Rightarrow \quad 10/$$

$\Rightarrow$ Rechazamos H_0 al 95%

$\Rightarrow$ El peso medio de los animales con la nueva dieta es significativamente mayor a 205.

$\triangleright$ p-valor $= P(t_7 > 2.12)$



$\Rightarrow$ $\boxed{0.025 < \text{p-valor} < 0.05}$ $\Rightarrow$ Al 95% rechazamos H_0 pero al 99% aceptamos H_0

(c): Sup. $X \sim N(\mu, \sigma = 21.85)$

¿n | $z_{0.99} * \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq 8$?

$$2.33 * \frac{21.85}{\sqrt{n}} = 8 \Rightarrow n = \left(2.33 * \frac{21.85}{8}\right)^2 =$$

$$= 40.5$$

$\Rightarrow$ $\boxed{n \geq 41}$