Dpto. Matemática Aplicada y Estadística

Grado en IIAA y Grado en IHJ
Asignatura: **Estadística Aplicada. Curso 2011-2012**
Segunda Prueba Escrita. 19-12-2011

NOMBRE 1:..
NOMBRE 2:..
NOMBRE 3:..

Problema 1	Problema 2	Problema 3	Nota final

1. La producción semanal en miles de galones de una determinada planta de destilación de derivados de petróleo se distribuye como una variable aleatoria X cuya función de densidad viene dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 1/4, & 0 \leq x < 2 \\ k(4-x), & 2 \leq x < 4 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se pide:

(a) Determinar el valor de la constante k para que $f(x)$ sea verdaderamente una función de densidad.

(b) Calcular la función de distribución asociada y la producción semanal promedio.

(c) Determinar la probabilidad de que se produzca menos de 3 mil galones sabiendo que se producen más de 1.5 miles de galones.

2. Una estrategia de control de tráfico está interesada en estudiar las llegadas de vehículos a un determinado cruce con la intención de proyectar una rotonda o no. Si las llegadas de vehículos al cruce siguen una distribución de **Poisson** de media 3 llegadas cada medio minuto, se pide:

(a) Determinar la probabilidad de que se den menos de dos llegadas en medio minuto.

(b) Determinar la probabilidad de que se den al menos tres llegadas en un minuto.

(c) Sabiendo que la distribución de probabilidad del tiempo (en minutos) transcurrido entre llegadas sucesivas de dos coches a dicho cruce es una distribución **exponencial** de media 1/6, hallar la probabilidad de que el tiempo entre la llegada consecutiva de dos coches sea menor de 1 minuto sabiendo que supera los 45 segundos.

3. El diámetro de un determinado tipo de manzanas se puede considerar como una variable aleatoria de media $\mu = 6.2$ cm. y de desviación típica $\sigma = 0.8$ cm. Para que las frutas sean catalogadas de calidad media su diámetro debe de estar comprendido en el intervalo (4.8,7.6).

   (a) ¿Podrías dar una cota de la proporción de manzanas que son catalogadas de calidad media? Razonar la respuesta.

   (b) Asumiendo a partir de este momento que el diámetro de este tipo de manzanas sigue un modelo **normal** de media $\mu = 6.2$ cm. y de desviación típica $\sigma = 0.8$ cm, dar respuesta a las siguientes cuestiones:

      (b1) Determinar el porcentaje exacto de manzanas de calidad media que se producen.

      (b2) Si las manzanas se distribuyen en bolsas de 10 unidades, determinar la probabilidad de que el número de manzanas que no son de calidad media sea como mucho de dos por bolsa.

      (b3) En una caja con 100 manzanas, determinar la probabilidad de que el número de manzanas de calidad media sea al menos de 85 manzanas en una caja.

$\boxed{2^{\circ}\ \text{PRUEBA ESCRITA}}$ (19-12-2011) 1/

P. 1: $X \rightsquigarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \le x < 2 \\ k(4-x), & 2 \le x < 4 \\ 0, & \text{———} \end{cases}$

(a): $\bullet\ 1 = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \frac{1}{4}\int_0^2 dx + k\int_2^4 (4-x)\,dx =$

$= \frac{1}{4}\, x\Big|_0^2 + k\left[4x\Big|_2^4 - \frac{x^2}{2}\Big|_2^4\right] = \frac{1}{4}(2-0) +$

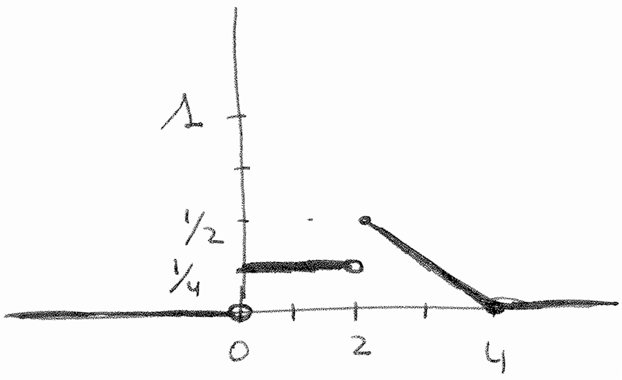
$+ k\left[4(4-2) - \frac{1}{2}(4^2-2^2)\right] = \frac{1}{2} + k\left[8 - \frac{1}{2}\cdot 12\right] =$

$= \frac{1}{2} + k(8-6) = \frac{1}{2} + 2k \Rightarrow 2k = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \boxed{k = \frac{1}{4}}$

• Veamos ahora si con $k = \frac{1}{4}$ se verifica que $f(x)$ es ≥ 0:

$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \le x < 2 \\ \frac{1}{4}(4-x), & 2 \le x < 4 \\ 0, & \text{———} \end{cases}$



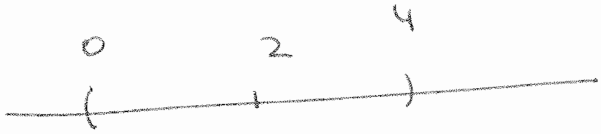
$\left(y = \frac{1}{4}(4-x) = 1 - \frac{x}{4} \right.$

x	y
2	1/2
4	0

$\rightsquigarrow$ Notamos que $f(x)$ es ≥ 0 $\forall x \in \mathbb{R}$.

(b): F. DISTRIBUCIÓN de X:

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$



Si $x < 0 \Rightarrow F(x) = 0$

Si $0 \leq x < 2 \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{4}\int_0^x dt = \frac{1}{4} t\Big|_0^x = \frac{x}{4}$

Si $2 \leq x < 4 \Rightarrow \quad F(x) = \frac{1}{4}\int_0^2 dt + \frac{1}{4}\int_2^x (4-t)\,dt =$

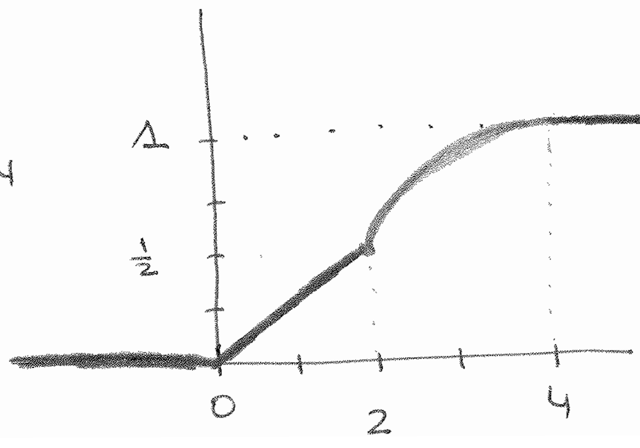
$$= \frac{1}{4} t\Big|_0^2 + \frac{1}{4}\left[4t\Big|_2^x - \frac{t^2}{2}\Big|_2^x\right] =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left[4(x-2) - \frac{1}{2}(x^2-4)\right] =$$

$$= -\frac{x^2}{8} + x - 1$$

Si $x \geq 4 \Rightarrow F(x) = 1$

$$\Rightarrow \quad F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x}{4}, & 0 \leq x < 2 \\ -\frac{x^2}{8} + x - 1, & 2 \leq x < 4 \\ 1, & x \geq 4 \end{cases}$$



$$\triangleright\ E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^2 x\,dx + \frac{1}{4}\int_2^4 \underbrace{x(4-x)}_{(4x-x^2)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{x^2}{2}\Big|_0^2 + \frac{1}{4}\left[\overset{2}{\cancel{4}}\,\frac{x^2}{\cancel{2}}\Big|_2^4 - \frac{x^3}{3}\Big|_2^4\right] =$$

$$= \frac{1}{\cancel{4}}\,\frac{\cancel{4}}{2} + \frac{1}{4}\left[2\underbrace{(4^2-2^2)}_{12} - \frac{1}{3}\underbrace{(4^3-2^3)}_{56}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(24 - \frac{56}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(\frac{72-56}{3}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\cancel{4}} * \frac{\overset{4}{\cancel{16}}}{3} =$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{4}{3} = \boxed{\frac{11}{6}}$$

(c) : $P(X<3 \,/\, X>1.5) = \dfrac{P(1.5<X<3)}{P(X>1.5)} =$

$$= \frac{F(3) - F(1.5)}{1 - F(1.5)} = \frac{0.875 - 0.375}{1 - 0.375} = \frac{0.5}{0.625} = \boxed{0.8}$$

$$\left(\begin{array}{l} F(3) = -\frac{3^2}{8} + 3 - 1 = -\frac{9}{8} + 2 = \frac{-9+16}{8} = \frac{7}{8} = 0.875 \\ F(1.5) = \frac{1.5}{4} = 0.375 \end{array} \right)$$

P.2 :

$$\begin{cases} X \equiv \text{Nº de llegadas cada medio minuto} \sim Po(\lambda = 3) \\ f_X(x) = e^{-3} \dfrac{3^x}{x!}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \end{cases}$$

(a) : $P(X < 2) = P(X \leq 1) =$

$$= \sum_{x=0}^{1} e^{-3} \frac{3^x}{x!} = e^{-3} \left(\frac{3^0}{0!} + \frac{3^1}{1!} \right) =$$

$$= 4 * e^{-3} = \boxed{0.1991}$$

(b) : $Y \equiv$ Nº de llegadas en 1 minuto $=$

$$= X_1 + X_2 \sim Po(\lambda = 3 + 3 = 6)$$

$$f_Y(y) = e^{-6} \frac{6^y}{y!}, \quad y = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots$$

$$P(Y \geq 3) = 1 - P(Y \leq 2) =$$

$$= 1 - \sum_{y=0}^{2} e^{-6} \frac{6^y}{y!} = 1 - e^{-6} \left(\frac{6^0}{0!} + \frac{6^1}{1!} + \frac{6^2}{2!} \right)$$

$$= 1 - e^{-6} \left(1 + 6 + \frac{36}{2} \right) = 1 - 25 * e^{-6} =$$

$$= \boxed{0.938}$$

(c) : $T \equiv$ Tiempo , en <u>minutos</u>, transcurrido entre llegadas sucesivas al cruce $\sim Exp(\lambda)$

$$E(T) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{6} \Rightarrow \lambda = 6$$

$$\Rightarrow \cdot f_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 6e^{-6t}, & t > 0 \end{cases} = \text{f. densidad}$$

$$\cdot F_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1 - e^{-6t}, & t > 0 \end{cases} = \text{f. DISTRIBUCIÓN}$$

$$P(T < 1 \,/\, T > 0.75) =$$

(45 segundos $= \frac{45}{60} = 0.75$ minutos)

$$= \frac{P(0.75 < T < 1)}{P(T > 0.75)} = \frac{F_T(1) - F_T(0.75)}{1 - F_T(0.75)} =$$

$$= \frac{(1 - e^{-6}) - (1 - e^{-6 \times 0.75})}{1 - (1 - e^{-6 \times 0.75})} = \frac{e^{-4.5} - e^{-6}}{e^{-4.5}} =$$

$$= 1 - e^{-6+4.5} = 1 - e^{-1.5} = \boxed{0.7769}$$

P.3: ▸ X = Diámetro de las manzanas. 6/

$\Rightarrow E(X) = 6.2$ cm.

$\sigma_X = 0.8$ cm.

▸ Frutas de $\underbrace{\text{CALIDAD MEDIA}}_{\text{C.M.}}$ si $X \in (4.8, 7.6)$

(a): Como NO conocemos la dist. de prob. de X vamos a intentar aplicar la desigualdad de Tchebychev:

$$P(4.8 < X < 7.6) = \cancel{P(4.8 - 6.2 < X - 6.2 < 7.6)}$$

$$= P(4.8 - 6.2 < X - 6.2 < 7.6) =$$

$$= P(-1.4 < X - 6.2 < 1.4) = P(|X - 6.2| < 1.4) =$$

$$\rightarrow 1.4 = K * \sigma_X = K * 0.8$$

$$\Rightarrow K = \frac{1.4}{0.8} = 1.75$$

$$= P(|X - 6.2| < 1.75 * \sigma_X) \geq 1 - \frac{1}{K^2} = 1 - \frac{1}{(1.75)^2} =$$

$$= \boxed{0.6735}$$

⇝ A menos el 67.35% de las manzanas serán catalogadas de C.M.

(b.1): Sup que $X \sim N(\mu = 6.2, \sigma = 0.8)$

$$p(C.M.) = p(4.8 < X < 7.6) =$$

$$= p\left(\frac{4.8 - 6.2}{0.8} < \underbrace{\frac{X - 6.2}{0.8}}_{N(0,1)} < \frac{7.6 - 6.2}{0.8} \right) =$$

$$= \phi(1.75) - \underbrace{\phi(-1.75)}_{1-\phi(1.75)} = 2\underbrace{\phi(1.75)}_{0.95995} - 1 = \underline{0.919}$$

$$p(C.M.) \cong 0.92$$

$$p(\text{manzanas que NO son de C.M.}) = 0.08$$

(b.2): $Y \equiv$ Nº de manzanas que NO son de calidad media en una bolsa de 10 manzanas $\sim B(n = 10, p = 0.08)$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \binom{10}{y} 0.08^y \, 0.92^{10-y}, \quad y = 0, 1, 2, \ldots, 1$$

$$P(Y \leq 2) = \sum_{y=0}^{2} \binom{10}{y} 0.08^y \, 0.92^{10-y} =$$

$$\binom{10}{0} 0.08^0 \, 0.92^{10} + \binom{10}{1} 0.08^1 \, 0.92^9 + \binom{10}{2} 0.08^2 \, 0.92^8 =$$

$$0.92^{10} + 10 * 0.08 * 0.92^9 + 45 * 0.08^2 \, 0.92^8 =$$

$$0.92^8 \left(0.92^2 + 10 * 0.08 * 0.92 + 45 * 0.08^2 \right) = 1.944 * 0.92^8 =$$

$$= \boxed{0.9179}$$

(b3) : Z = Nº de manzanas de colo[r] media en una caja de 100 manzanas $\sim B(n=100,\ p=0.92)$ 818

$P(Z \geq 85) =$

~~[illegible]~~ Veamos si podemos aproximar Z por una NORMAL :

$np = 100 * 0.92 = 92 > 5$

$np(1-p) = 100 * 0.92 * 0.08 = 7.36 > 5$

si $W \sim N(92, \sqrt{7.36} = 2.71)$

entonces $Z \approx W$

Aplicando la CORRECCIÓN POR CONTINUIDAD

$$P(Z \geq 85) \cong P(W \geq 84.5) =$$

$$= 1 - P(W < 84.5) = 1 - \phi\left(\frac{84.5 - 92}{2.71}\right) =$$

$$= 1 - \phi(-2.76) = \phi(2.76) = \boxed{0.9971}$$