Tema 2: INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA PROBABILIDAD

1 Conceptos básicos.

1.1 Experimento aleatorio.

Un experimento o fenómeno se dice **aleatorio** si verifica las condiciones:

- Se conocen previamente todos los resultados posibles del experimento.
- No se puede predecir el resultado antes de realizarlo.
- Se puede repetir indefinidamente bajo las mismas condiciones.

`Ejemplos:`

- Lanzamiento de un dado ordinario.

- Suma de puntos obtenidos al lanzar dos dados.

- Consumo de energía eléctrica en la región durante un mes,....

1.2 Espacio muestral asociado a un experimento aleatorio

Conjunto de todos los resultados posibles del experimento aleatorio, se denota por Ω o bien S.

Atendiendo al número de resultados del experimento, los espacios muestrales se clasifican en:

- **Discretos**: Cuando el espacio muestral es finito o infinito numerable.

`Ejemplos:`

- Lanzamiento de un dado ordinario $\Rightarrow \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- Lanzamiento sucesivamente una moneda hasta obtener la primera cara
$\Rightarrow \Omega = \{c, xc, xxc, xxxc, xxxxc, ...\}$

- **Continuos:** Cuando el espacio muestral es infinito no numerable.

`Ejemplos:`

- Consumo de energía eléctrica en Murcia $\Rightarrow \Omega = [0, \infty)$

- Elección al azar de un número real perteneciente al intervalo [0,1] $\Rightarrow \Omega = [0, 1]$

1.3 Suceso.

Cualquier subconjunto del espacio muestral. Se denotan por A, B, C,...

Sucesos elementales: Cada uno de los puntos de espacio muestral.

Para cada suceso A asociado a un experimento aleatorio, se dice que "**ha ocurrido** A**"** si el resultado del experimento es un punto que está en $A \Rightarrow$

$$\Omega : \quad \textbf{suceso seguro}$$

$$\emptyset : \quad \textbf{suceso imposible}$$

Diremos que A y B son **iguales**, $A = B$, si están formados por los mismos resultados.

Dados dos sucesos A y B, diremos que el suceso A está **incluido** en el suceso B, $A \subset B$, si todo resultado de A lo es también de B.

Operaciones con sucesos:

Sean A y B, sucesos asociados a un experimento aleatorio

- **Suceso unión de** A **y** B, $A \cup B$: Suceso formado por todos los resultados de A, o de B, o de ambos;
$$\boxed{A \cup B = \{x \in \Omega \ / \ (x \in A) \ \textbf{ó} \ (x \in B)\}}$$
- **Suceso intersección de** A **y** B, $A \cap B$: Suceso formado por los resultados comunes de A y de B,
$$\boxed{A \cup B = \{x \in \Omega \ / \ (x \in A) \ \mathbf{y} \ (x \in B)\}}$$

Propiedades:

Dados A, B y C sucesos de un espacio muestral Ω, se verifican las siguientes propiedades:

Asociativa:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

Conmutativa:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Distributiva:

$$A \cup (B \cap C) \;=\; (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) \;=\; (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

Existencia de elemento neutro:

$$A \cup \emptyset \;=\; A$$

$$A \cap \Omega \;=\; A$$

- **Suceso complementario o contrario de** A , $\overline{A}$ ó A^c: Suceso formado por todos los resultados de Ω que no están en A,

$$\boxed{\overline{A} = A^c = \{x \in \Omega \;/\; x \notin A\}}$$

Leyes de Morgan:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

`Nota:` Las leyes de Morgan se pueden generalizar.

- **Suceso diferencia de** A **y** B, $A - B$: Suceso formado por todos los resultados de A que no están en B,

$$\boxed{A - B = \{x \in \Omega \;/\; (x \in A) \textbf{ y } (x \notin B)\}}$$

  Se cumple que:

$$A - B = A \cap B^c$$

- **Suceso diferencia de** B **y** A, $B - A$: Suceso formado por todos los resultados de B que no están en A,

$$\boxed{B - A = \{x \in \Omega \;/\; (x \in B) \textbf{ y } (x \notin A)\}}$$

  Se cumple que:

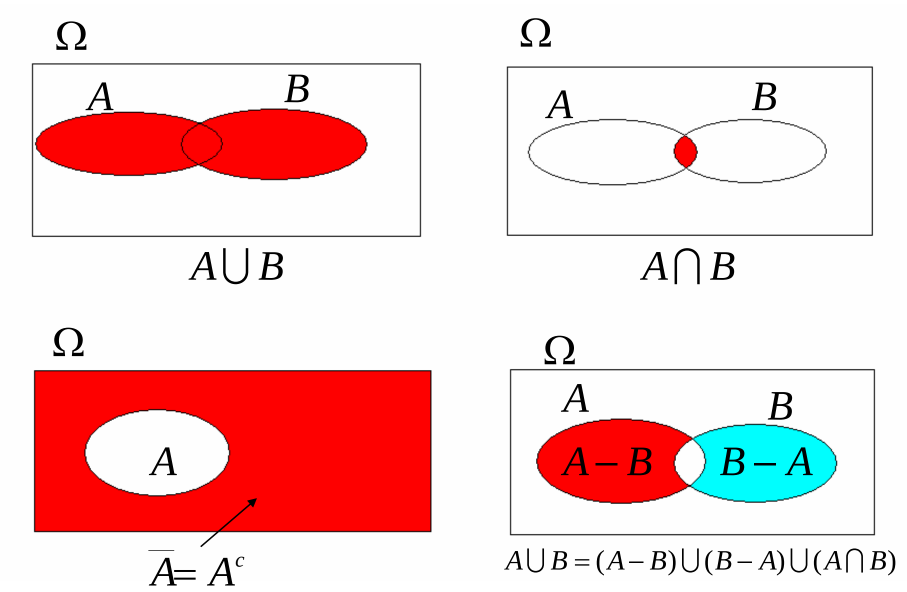
$$B - A = B \cap A^c$$

Dos sucesos A y B se dicen **incompatibles**, **excluyentes**, **mutuamente excluyente** o **disjuntos** si no tienen resultados en común, esto es, $A \cap B = \emptyset$.

`Notar que si`

$$A \text{ y } B \text{ contrarios o complementarios} \;\; \begin{array}{c}\Rightarrow \\ \not\Leftarrow\end{array} \;\; A \text{ y } B \text{ incompatibles o excluyentes}$$

Visualización de las operaciones con sucesos mediante los diagramas de Venn:



`Ejemplo:`Lanzamos una moneda tres veces $\Longrightarrow$ $\Omega = \{ccc, ccx, cxc, xcc, cxx, xcx, xxc, xxx\}$.
Consideremos los siguientes sucesos:

$$\begin{array}{rcl} A & = & \text{Obtener al menos una cara} \Rightarrow A = \{ccc, ccx, cxc, xcc, cxx, xcx, xxc\} \\ B & = & \text{Obtener el mismo resultado en los tres lanzamientos} \Rightarrow B = \{ccc, xxx\} \\ C & = & \text{Obtener exactamente una cara} \Rightarrow C = \{cxx, xcx, xxc\} \\ D & = & \text{No obtener cara alguna} \Rightarrow D = \{xxx\} \\ E & = & \text{Obtener exactamente dos cruces} \Rightarrow E = \{cxx, xcx, xxc\} \end{array}$$

Entonces:

$$\left\{ \begin{array}{c} C = E \\ D \subset B;\ C \subset A;\ E \subset A \\ B \text{ y } C (= E) \text{ son incompatibles pero no contrarios} \\ A \text{ y } D \text{ son contrarios e incompatibles} \end{array} \right.$$

2 Concepto de probabilidad

2.1 Introducción

Cuando un experimento aleatorio se lleva a cabo, es imposible predecir de antemano el resultado. Si éste se repite varias veces bajo condiciones análogas, podemos obtener diferentes resultados y alguno de ellos se puede repetir. Sin embargo, después de muchas repeticiones emerge cierta regularidad en los resultados. Queremos introducir una medida que cuantifique la incertidumbre, o la certidumbre, asociada a cada resultado o a cada suceso de un experimento aleatorio. Esta medida es la Probabilidad.

A lo largo de la historia se han desarrollado diversas interpretaciones científicas del concepto de probabilidad. Vamos a destacar las tres más importante, aunque el debate no está ni mucho menos cerrado y actualmente continúa vigente:

- La **interpretación clásica o de Laplace** nace asociada a los juegos de azar. La regla de Laplace proporciona una forma práctica de asignar probabilidades, basada en el concepto de resultados mutuamente excluyentes e igualmente verosímiles o equiprobables (esencia del concepto que tratamos de definir), por lo que su campo de aplicabilidad es muy limitado. En un intento de superar las carencias de la interpretación clásica se desarrolla la interpretación frecuentista de la probabilidad.

- La **interpretación frecuentista de la probabilidad** se basa en la experiencia de la estabilidad de las frecuencias relativas al repetir un experimento en condiciones similares durante un número suficientemente grande de veces.

- En la **interpretación bayesiana** considera la probabilidad como un concepto personal subjetivo que expresa un grado de creencia o verosimilitud sobre la ocurrencia de un suceso.

Las limitaciones de las teorías e interpretaciones clásica, frecuentista y subjetiva hacen imposible la formalización de un modelo matemático que explique el comportamiento de los resultados aleatorios, consiguiéndose con el planteamiento axiomático de Kolmogorov. La teoría axiomática de la Probabilidad engloba las interpretaciones anteriores, ya que de nada serviría un modelo teórico que estudia un fenómeno que entre en contradicción con las experiencias empíricas. Pasamos a estudiar la definición axiomática del concepto de probabilidad propuesta por Kolmogorov en 1933 y analizaremos las principales consecuencias que se deducen a partir de ella.

2.2 Definición axiomática de la probabilidad: Kolmogorov

Sea un experimento aleatorio y su espacio muestral asociado Ω. Una **función de probabilidad** asigna un número real $P(A)$ a cada suceso $A \subset \Omega$ verificando los axiomas:

- Axioma 1: $P(A) \geq 0, \forall\, A \subset \Omega$
- Axioma 2: $P(\Omega) = 1$
- Axioma 3: Para una secuencia de sucesos $A_1, A_2, \ldots.., A_n, \ldots..$ que cumplen que $A_i \cap A_j = \emptyset$ cuando $i \neq j \implies$

$$P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Consecuencias de los axiomas:

1. $P(\emptyset) = 0$
2. Sean A y B sucesos incompatibles, esto es, $A \cap B = \emptyset \implies$

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$

   Nota: Esta consecuencia se puede generalizar a un número finito de sucesos incompatibles dos a dos.

3. Sean A y B dos sucesos cualesquiera $\implies$

$$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

4. Sean A, B y C tres sucesos cualesquiera $\implies$

$$\boxed{P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)}$$

5. $\forall\, A \subset \Omega \implies$

$$\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$$

6. $\forall\, A \subset \Omega \implies$

$$\boxed{P(A) \leq 1}$$

7. Sean A y B sucesos tales que $A \subset B \implies$

$$\boxed{P(A) \leq P(B)}$$

Problema fundamental: Dado un espacio muestral discreto con resultados $\Omega = \{w_1, w_2, ..., w_n\}$, una forma de definir una función de probabilidad es asignar un valor $P(w_i)$ no negativo a cada resultado w_i que verifique:

$$\boxed{P(w_1) + P(w_2) + ... + P(w_n) = 1}$$

Entonces la forma de asignar probabilidades a un suceso A sería

$$\boxed{P(A) = \sum_{i/w_i \in A} P(w_i)}$$

Si además **los resultados del experimento son excluyentes y equiprobables** $\Longrightarrow$

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{número de resultados favorables al suceso A}}{\text{número de resultados posibles del experimento}}}$$

▲ Definición clásica de la probabilidad (LAPLACE)

Ejemplos (EQUPROBABILIDAD):

- Lanzamos una moneda equilibrada $\Rightarrow$ $\Omega = \{c, x\}$

$$P(c) = \frac{1}{2}$$

- Lanzamos un dado $\Rightarrow$ $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

$$P(\text{“}\textit{Número PAR}\text{”}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

- Una urna contiene 3 bolas blancas, 2 negras y 4 rojas. Seleccionamos una bola al azar $\Rightarrow$

$$P(\text{“}\textit{Bola extraida sea ROJA}\text{”}) = \frac{4}{9}$$

$$P(\text{“}\textit{Bola extraida NO sea NEGRA}\text{”}) = \frac{7}{9}$$

3 Probabilidad condicionada

En ciertas ocasiones es necesario encontrar la probabilidad de un suceso A bajo la condición de que un cierto suceso B ha ocurrido y, por lo tanto, la $P(B) > 0$.

`Ejemplo:` Consideremos el experimento aleatorio de lanzar un dado ordinario $\Rightarrow \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. En un juego de dados se ha apostado por el "2". Se tira el dado y, antes de ver el resultado, nos dicen que ha salido par. Hallar la probabilidad de ganar.
Definimos los sucesos:

$$\begin{aligned} A &= \text{Obtenemos la cara "2" (=ganamos en el juego)} \\ B &= \text{Obtenemos un número par} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{1}{6} \\ P(B) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Si se sabe que B ha ocurrido, entonces el espacio muestral se reduce a $\{2, 4, 6\}$ y la

$$P(A/B) = \frac{1}{3} \left(= \frac{1/6}{1/2} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \right)$$

`Definición:` Sea B un suceso de Ω con $P(B) > 0$. Se define la **probabilidad de un suceso** A **condicionada al suceso** B como:

$$\boxed{P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Se puede comprobar que la $P(\cdot/B)$ verifica los tres axiomas y, por lo tanto, es una función de probabilidad.

Entonces

$$\boxed{P(A \cap B) = P(B) \times P(A/B) = P(A) \times P(B/A)}$$

▲ **Regla del producto**

siempre que las anteriores probabilidades estén bien definidas, para lo cual, $P(B) > 0$, o bien, $P(A) > 0$.

La regla del producto se puede generalizar a tres o más sucesos. Una forma de escribirla para tres sucesos sería:

$$\boxed{P(A \cap B \cap C) = P(A) \times P(B/A) \times P(C/A \cap B)}$$

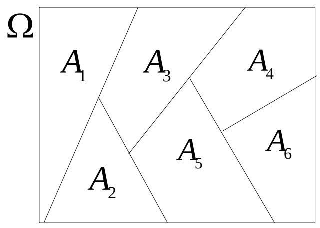
siempre que la $P(A) > 0$ y la $P(A \cap B) > 0$.

4 Teorema de la probabilidad total y Teorema de Bayes

`Definición:` Una colección de sucesos $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ de Ω, se dice que es una **partición** de Ω si se verifica que:

- $A_i \cap A_j = \emptyset$ con $i \neq j$, esto es, los $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ son incompatibles dos a dos.
- $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \Omega$.

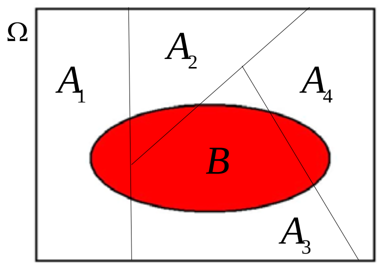
Un ejemplo con 6 sucesos en la partición sería:



Teorema de la probabilidad total

Sea $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ una partición de Ω con $P(A_i) > 0$, $\forall i$ y sea B un suceso de Ω, entonces

$$\boxed{P(B) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(B/A_i)}$$



Teorema de Bayes

Sea $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ una partición de Ω con $P(A_i) > 0, \forall i$ y sea B un suceso de Ω con $P(B) > 0$, entonces para culaquier suceso A_j de la partición se tiene que

$$\boxed{P(A_j/B) = \frac{P(A_j) \times P(B/A_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(A_i) \times P(B/A_i)}}$$

5 Independencia de sucesos

Si el conocimiento de la ocurrencia de un suceso B no cambia la probabilidad asignada a otro suceso A, entonces se dice que A y B son **sucesos independientes** y, en este caso, $P(A/B) = P(A)$.
Como $P(A \cap B) = P(A/B) \times P(B)$, se tiene que:

$$\boxed{A \text{ y } B \text{ son } \textbf{independientes} \;\; \Leftrightarrow \;\; P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$$

En otro caso, se dicen que A y B son **sucesos dependientes** y, en este caso, $P(A/B) \neq P(A)$

`Consecuencias:`

Si A y B son independientes $\Rightarrow$

- A y $\overline{B}$ son independientes.
- $\overline{A}$ y B son independientes.
- $\overline{A}$ y $\overline{B}$ son independientes.

Independencia de tres o más sucesos:

- Tres sucesos A, B y C son **independientes** $\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} P(A \cap B \cap C) &= P(A) \times P(B) \times P(C) \\ P(A \cap B) &= P(A) \times P(B) \\ P(A \cap C) &= P(A) \times P(C) \\ P(B \cap C) &= P(B) \times P(C) \end{aligned}$$

- Los sucesos $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ son **independientes** si para todo subconjunto $\{A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{ik}\}$ se verifica que

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap ... \cap A_{ik}) = P(A_{i1}) \times P(A_{i2}) \times ... \times P(A_{ik})$$

6 ANEXO: Combinatoria.

Se suele decir que la combinatoria reune a un conjunto de métodos para contabilizar el número de casos posibles de un experimento aleatorio o el número de casos favorables asociados a un suceso. Estás técnicas nos serán de gran utilidad a la hora de utilizar el concepto de probabilidad dado por Laplace.

Veamos el siguiente ejemplo:

¿Cuántas palabras pueden formarse escogiendo 3 letras de las que forman la palabra CARLOS? Para resolver este problema podemos simplificarlo, estudiando primero cuántas palabras de una letra se pueden formar: C,A,R,L,O,S (6), cuántas de dos letras, etc... hasta obtener una formula general. Nos pueden ser de ayuda los diagramas en forma de árbol

$$
\begin{array}{ccccc}
1^a \text{ letra} & & 2^a \text{ letra} & & 3^2 \text{ letra} \\
 & & A & \rightarrow & R \\
 & \nearrow & & & \ldots \\
C & \rightarrow & R & & \\
 & \ldots & & & \\
A & \rightarrow & C & & \\
 & \ldots & & &
\end{array}
$$

Así se obtiene que con sólo una letra tenemos 6 palabras distintas, con dos, $6 \cdot 5 = 30$ palabras distintas y con tres, $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$, etc... ya que una vez colocada la primera letra sólo tenemos cinco opciones para la segunda y colocadas las dos primeras letras, sólo tenemos cuatro opciones para la tercera. Intente obtener el número de palabras de longitud m que pueden formarse con n letras (símbolos) diferentes. La solución es

$$V_{n,m} = \overbrace{n(n-1)\ldots}^{m \ \text{números}} = n(n-1)\ldots(n-m+1)$$

donde la letra V proviene de **Variaciones,** que es el nombre que reciben estas formaciones caracterizadas por el hecho de que en ellas influye el orden en que se coloquen los símbolos, de forma que la palabra CAR es diferente de la palabra CRA.

Un caso particular de variaciones son aquellas en las que intervienen todos los símbolos ($n = m$), denominadas **Permutaciones**, cuyo número será

$$P_n = V_{n,n} = n(n-1)\ldots 1 = n!$$

donde $n!$, se lee como ene factorial y es simplemente una forma de representar la multiplicación $n(n-1)\ldots 1$. Con esta notación se tiene $V_{n,m} = n!/(n-m)!$.

Veamos un ejemplo, ¿Cuántas palabras pueden formarse permutando (cambiando) las letras de la palabra CARLOS? La solución es:

$$P_6 = 6! = 6.5.4.3.2.1 = 720$$

Otros problemas plantean diferentes elecciones con una serie de opciones cada una. Así, por ejemplo, si tenemos que montar un ordenador y disponemos de tres pantallas diferentes, dos tipos de teclado y cinco unidades centrales, todos ellos compatibles entre sí, en total tendremos $3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$ opciones.

Existen otro tipo de problemas donde el orden no tiene importancia, por ejemplo si tenemos que escoger a dos ingenieros para trabajar en nuestra empresa de entre siete candidatos, ¿cuántas opciones diferentes tenemos? Este problema consiste en elegir un subconjunto de dos personas de un conjunto formado por los siete candidatos:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{a b c d}\\ \text{e f g}\end{array}} \longrightarrow \boxed{\text{b g}}$$

De nuevo para resolver el problema, estudiaremos primero otros más simples. Primero supongamos que tenemos un conjunto con un sólo elemento {a}, que tendrá 1 subconjunto con cero elementos (el vacio $\emptyset$) y otro con un elemento {a}. Si el conjunto tiene dos elementos {a,b}, tendrá 1 con cero elementos, 2 ({a} y {b}) con un elemento, y 1 ({a,b}) con dos elementos. Para {a,b,c} se obtienen 1,3,3,1, para {a,b,c,d}, 1,4,6,4,1, etc... Estos números pueden escribirse de la forma siguiente:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Obsérvese que los números de una fila se obtienen sumando los situados justamente encima de él.

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & & & 3 \\
 & \swarrow & & \searrow & & \swarrow & \\
1 & & & & 4 & &
\end{array}$$

Estos números reciben el nombre de números combinatorios y esta forma de presentarlos es conocida como el triángulo de Pascal o de Tartaglia. Puede comprobarse que el número que aparece en la fila n en la posición $m+1$, que representaremos mediante $\binom{n}{m}$ (n sobre m), verifica

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Por ejemplo, $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!2!} = 6$. Por convenio, se define $0!=1$ para que $\binom{4}{0} = \frac{4!}{4!0!} = 1$. Es decir, el triángulo de Pascal estaría formado por

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}$$

Con la notación introducida se tendría que el número de combinaciones de n elementos tomados de m en m es

$$C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{V_{n,m}}{m!}$$

fórmula que puede deducirse teniendo en cuenta que de cada combinación {1,...,m} se obtienen $m!$ variaciones permutando los símbolos entre sí (123...m, 213...m, etc...).

Los números combinatorios aparecen al calcular las diferentes potencias de un binomio, $(a+b)^1 = a+b$, $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$, $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$, *etc...* y en lo que se conoce como fórmula de Newton

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^nb^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0b^n$$

Si en esta fórmula hacemos $a=1$ y $b=1$ se obtiene que

$$(1+1)^n = 2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n},$$

es decir, que el número de los subconjuntos (de cualquier tamaño, incluido el vacio) de un conjunto con n elementos es igual a 2^n (e igual a la suma de la fila n-ésima del triángulo de Pascal).

Por fin volveremos a nuestro problema original que consistía en elegir a dos personas entre siete candidatos, para el que tendremos

$$C_{7,2} = \binom{7}{2} = \frac{7!}{2!5!} = \frac{7\cdot 6}{2} = 21$$

opciones diferentes. Si reformulamos el problema de forma que podamos elegir a los candidatos que queramos (desde ninguno, $\emptyset$, a todos), las opciones serán

$$\binom{7}{0} + \binom{7}{1} + \ldots + \binom{7}{6} + \binom{7}{7} = (1+1)^7 = 2^7$$

Este problema puede resolverse de otra forma. Para el primer candidato tenemos dos opciones, elegirlo o no elegirlo, para el segundo lo mismo, etc... Así la decisión se podría escribir de la forma siguiente 0110011, donde el primer cero indica que el primer candidato no es elegido, el segundo dígito (1) indica que el segundo sí es elegido y así sucesivamente. Entonces nuestro problema sería estudiar cuántas palabras (números) de longitud 7 pueden formarse con dos símbolos (0 y 1). Formando un diagrama de árbol, como para cada posición tendremos dos opciones, en total se podrán formar 2^7 palabras distintas.

De igual forma podemos estudiar cuántas palabras pueden formarse con las letras de CARLOS pero permitiéndose que éstas se repitan. Comenzaremos por las palabras formadas por una sola letra para las que tendremos 6 opciones. Para las de dos letras tendremos 36, etc... y en general se tendrán 6^m, donde m indica la longitud de las palabras (m puede ser mayor que 6).

En general, con n símbolos distintos ¿Cuántas palabras de longitud m se podrán formar? Estas formaciones reciben el nombre de **Variaciones con Repetición** y su número es

$$VR_{n,m} = n^m$$

Supongamos ahora que estamos participando en el juego de las palabras cruzadas y que disponemos de las letras A,S,R,Q,A,A,S. ¿Cuántas palabras podemos formar usándolas todas? El problema es equivalente a estudiar cuántas palabras se pueden formar permutando (cambiando de orden) las letras de CASA. Si todas las letras fuesen distintas (COSA) tendríamos $P_4 = 4! = 24$ opciones. Pero al tener dos letras repetidas (A,A), cuando las permutemos obtendremos la misma palabra. De forma que de COSA y CASO, se obtiene sólo CASA. De esta forma se obtiene que con CASA se podrán formar 24/2=12 palabras distintas. ¿Que ocurrirá con las letras CAAAS? ¿Y con CASAS? Estúdiense estos problemas hasta deducirse la siguiente fórmula general. El número de palabras de longitud n que pueden formarse con n letras, donde la primera se repite n_1 veces, la segunda n_2, etc... se denomina Permutaciones con Repetición y su número es:

$$PR^n_{n_1,n_2\ldots n_k} = \frac{n!}{n_1!\ldots.n_k!}$$

Usando esta formula general se obtiene que con CAAAS, pueden formarse

$$PR^5_{1,3,1} = \frac{5!}{1!3!1!} = 20$$

palabras distintas, con CASAS,

$$PR^5_{1,2,2} = \frac{5!}{1!2!2!} = 30,$$

y con A, S, R, Q, A, A, S,

$$PR^7_{3,2,1,1} = \frac{7!}{3!2!1!1!} = 420$$

palabras distintas.

Por último estudiaremos las formaciones denominadas Combinaciones con Repetición. Introduciremos el problema con un ejemplo. Supongamos que el capitán de un barco puede cargar 5 contenedores. Puede elegir entre tres mercancías diferentes: transistores, ordenadores o cintas de vídeo, habiendo en el puerto existencias suficientes de las tres ¿Cuántas opciones tiene? Una opción sería cargar sólo transistores {TTTTT}, otra dos de transistores y tres de ordenadores {T,T,T,O,O}, etc... Se trata de calcular el número de subconjuntos de 5 elementos que pueden formarse con los elementos de {T,O,C} permitiéndose la repetición de éstos. En general el número de combinaciones con repetición que pueden formarse con n elementos tomados de m en m es:

$$CR_{n,m} = \binom{n+m-1}{m}$$

De esta forma la solución del problema anterior sería

$$CR_{3,5} = \binom{7}{5} = \frac{7!}{5!2!} = \frac{7\cdot 6}{2\cdot 1} = 21$$

6.1 RESUMEN:

- Variaciones:
  - Sin repetición:

$$V_{n,m} = n(n-1)\overbrace{\ldots}^{m \quad números} = n(n-1)\ldots(n-m+1)$$

  - Con repetición:

$$VR_{n,m} = n^m$$

- Permutaciones:
  - Sin repetición:

$$P_n = V_{n,n} = n(n-1)\ldots1 = n!$$

  - Con repetición:

$$PR^n_{n_1,n_2\ldots n_k} = \frac{n!}{n_1!\ldots.n_k!}$$

- Combinaciones:
  - Sin repetición:

$$C_{n,m} = \binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{V_{n,m}}{m!}$$

  - Con repetición:

$$CR_{n,m} = \binom{n+m-1}{m}$$

6.2 Ejemplos:

- En un club hay 10 personas y queremos elegir presidente y secretario, ¿cuántas grupos de presidente y secretario podemos formar?

$$V_{10,2} = 10 \times 9 = 90 \text{ grupos}$$

- ¿Cuántas quinielas podemos rellenear?

$$VR_{3,14} = 3^{14} = 4.782.969 \text{ quinielas}$$

- Tenemos 5 libros de estadística y queremos colocarlos en una estantería, ¿de cuántas maneras distintas podemos ordenarlos?

$$P_5 = 5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120 \text{ maneras distintas}$$

- ¿Cuántas primitivas distintas podemos rellenar?

$$C_{49,6} = \binom{49}{6} = 13.983.816 \text{ primitivas distintas}$$

- Tenemos 3 cajas iguales {**A**,B,**C**} y 5 bolas iguales ¿cómo podemos colocar las cinco bolas en las tres cajas?

$$CR_{3,5} = \binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = 21 \text{ formas distintas}$$

- ¿Cuántas palabras distintas (con o sin sentido) se pueden formar con las letras {**C**,**A**,**A**,**S**,**S**}?

Notar ahora que tenemos 5 elementos donde el primero se repite 1 vez, el segundo se repite 2 veces y el tercero se repite 2 veces $\Rightarrow$ El número de ordenaciones distintas que se pueden formar con los 5 elementos se corresponde con el número de permutaciones con repetición que se pueden formar con las letras {**C**,**A**,**A**,**S**,**S**} y su número es.

$$PR_5^{1,2,2} = \frac{5!}{1! \times 2! \times 2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{1 \times 2 \times 2} = 30 \text{ palabras distintas}$$