Tema 3: VARIABLES ALEATORIAS

Introducción

En el tema anterior hemos modelizado el comportamiento de los experimentos aleatorios. Los resultados de un experimento aleatorio pueden ser de cualquier naturaleza, tanto cualitativa como cuantitativa. Sin embargo, los resultados cualitativos de un experimento dificultan su tratamiento matemático, por ello, se recurre a asignar un valor numérico a cada resultado del experimento aleatorio considerado. Para llevar a cabo tal cuantificación de los resultados se introduce el concepto de *Variable Aleatoria*.

Las variables aleatorias permiten estudiar el comportamiento aleatorio de un experimento aleatorio en el marco de los números reales, con todas las ventajas que esto conlleva. En definitiva, trasladamos los problemas relacionados con el espacio muestral a la recta real por lo que esta transformación debe permitir definir una función de probabilidad en $\mathbb{R}$ que conserve las probabilidades del espacio inicial.

En el tema 3 vemos la noción de variable aleatoria y las funciones asociadas a la misma. A continuación, intentaremos resumir las características más sobresalientes de la variable aleatoria mediante la especificación de unos cuantos valores numéricos en lugar de toda una función. Y así, de la misma forma como se hizo para una distribución de frecuencias, podemos construir medidas características (tendencia, dispersión, simetría, etc...) del comportamiento de una variable aleatoria con una interpretación análoga. Acabaremos el tema, analizamos los modelos de distribución de probabilidad que subyacen más frecuentemente en los fenómenos aleatorios que podemos tratar, comenzando por aquellos donde la variable aleatoria descrita sea de naturaleza discreta para pasar a continuación a las familias más comunes de distribuciones continuas.

1 Concepto de variable aleatoria

Sea Ω el espacio muestral de un experimento aleatorio. Definimos **variable aleatoria**, **v.a.**, como una aplicación

$$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

tal que $\forall w \in \Omega$,

$$\begin{array}{rccc} X: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & w & \hookrightarrow & X(w) \in \mathbb{R} \end{array}$$

`Ejemplos:`

- Experimento aleatorio: Lanzamos 3 veces una moneda
  $\Rightarrow \Omega = \{ccc, ccx, cxc, xcc, cxx, xcx, xxc, xxx\}$

  Definimos la variable aleatoria X_1=N^o caras obtenidas en los tres lanzamientos $\Rightarrow$

$$\begin{array}{rccc} X_1: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ccc & \hookrightarrow & 3 \\ & \left.\begin{array}{c} ccx \\ cxc \\ xcc \end{array}\right\} & \hookrightarrow & 2 \\ & \left.\begin{array}{c} cxx \\ xcx \\ xxc \end{array}\right\} & \hookrightarrow & 1 \\ & xxx & \hookrightarrow & 0 \end{array}$$

Podemos definir también la variable aleatoria Y=N^o de caras-N^o de cruces $\Rightarrow$

$$
\begin{array}{cccc}
Y: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & & & \\
 & ccc & \hookrightarrow & 3 \\
 & \left.\begin{array}{c} ccx \\ cxc \\ xcc \end{array}\right\} & \hookrightarrow & 1 \\
 & & & \\
 & \left.\begin{array}{c} cxx \\ xcx \\ xxc \end{array}\right\} & \hookrightarrow & -1 \\
 & & & \\
 & xxx & \hookrightarrow & -3
\end{array}
$$

- Experimento aleatorio: Lanzamos una moneda hasta obtener la primera cara
  $\Rightarrow \Omega = \{c, xc, xxc, xxxc, xxxxc, ...\}$
  Definimos la variable aleatoria X_2=N^o de fracasos(=número de cruces) antes de obtener la primera cara $\Rightarrow$

$$
\begin{array}{cccc}
X_2: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & & & \\
 & c & \hookrightarrow & 0 \\
 & xc & \hookrightarrow & 1 \\
 & xxc & \hookrightarrow & 2 \\
 & xxxc & \hookrightarrow & 3 \\
 & xxxxc & \hookrightarrow & 4 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

- Experimento aleatorio: Realizamos una medición de la concentración de producto en una determinada solución $\Rightarrow \Omega = (0, \infty)$
  Definimos la variable aleatoria X_3=Valor medido de la concentración $\Rightarrow$

$$
\begin{array}{cccc}
X_3: & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
 & & & \\
 & w & \hookrightarrow & X_3(w) = w
\end{array}
$$

`Definición:` El **rango** de una variable aleatoria es el conjunto de puntos que toma la variable aleatoria.

`Ejemplos:`

- Rango de $X_1 = \{0, 1, 2, 3\}$

  Rango de $Y = \{-3, -1, 1, 3\}$
- Rango de $X_2 = \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
- Rango de $X_3 = (0, \infty)$

Atendiendo al conjunto de puntos que hay en el rango de una variable aleatoria, ésta se puede dividir en:

Discreta : El rango es finito o infinito numerable $\Rightarrow$ X_1, Y y X_2 son v.a. discretas

Continua : El rango es infinito no numerable $\Rightarrow$ X_3 es una v.a. continua

2 Distribución de una variable aleatoria

Queremos describir el comportamiento aleatorio de la v.a., es decir, vamos a ver cómo asignar probabilidades a los sucesos relacionados con la v.a. X (que son sucesos que se escriben como subconjuntos de $\mathbb{R}$). Una forma de hacerlo es mediante la función de distribución de la v.a. X.

`Definición:` Definimos la **función de distribución** de una variable aleatoria X como la función

$$F_X = F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = F(x) = P(X \leq x) = P(X \in (-\infty, x]) = P(\{w \in \Omega \ / \ X(w) \leq x\})}$$

`Ejemplo:` Experimento aleatorio: Lanzamos 3 veces una moneda equilibrada
$\Rightarrow \Omega = \{ccc, ccx, cxc, xcc, cxx, xcx, xxc, xxx\}$
Definimos la variable aleatoria X_1=N^o caras obtenidas en los tres lanzamientos $\Rightarrow$

$$\begin{array}{cccc} X_1 : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ccc & \hookrightarrow & 3 \\ & \left.\begin{array}{c} ccx \\ cxc \\ xcc \end{array}\right\} & \hookrightarrow & 2 \\ & \left.\begin{array}{c} cxx \\ xcx \\ xxc \end{array}\right\} & \hookrightarrow & 1 \\ & xxx & \hookrightarrow & 0 \end{array}$$

Si $x < 0 \ \Rightarrow \ F(x) = 0$

Si $0 \leq x < 1 \ \Rightarrow \ F(x) = P(X \leq x) = P(\{xxx\}) = \dfrac{1}{8}$

Si $1 \leq x < 2 \ \Rightarrow \ F(x) = P(X \leq x) = P(\{xxx, xxc, xcx, cxx\}) = \dfrac{4}{8}$

Si $2 \leq x < 3 \ \Rightarrow \ F(x) = P(X \leq x) = P(\{xxx, cxx, xcx, xxc, ccx, cxc, xcc\}) = \dfrac{7}{8}$

Si $x \geq 3 \ \Rightarrow \ F(x) = P(X \leq x) = P(\{xxx, cxx, xcx, xxc, ccx, cxc, xcc, ccc\}) = \dfrac{8}{8} = 1$
Entonces

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0 \\ 1/8, & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 4/8, & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 7/8, & \text{si } 2 \leq t < 3 \\ 1 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

Propiedades de la función de distribución:

1. $F(x) \in [0,1]$

   Además:

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$$

2. $F(x)$ es monótona creciente, esto es,

$$\text{si } x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$$

3. $\forall x \in \mathbb{R},\ \ F(x)$ es continua por la derecha, esto es,

$$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \qquad \lim_{x\to x_0^+} F(x) = F(x_0)$$

   Las propiedades 1, 2 y 3 caracterizan a toda función de distribución de una v.a.

4. $\forall a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$ se tiene que

$$P(a < X \leq b) = P(X \in (a,b]) = F(b) - F(a)$$

5. $\forall c \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$P(X > c) = 1 - F(c)$$

Vamos a ver ahora otra forma de describir el comportamiento aleatorio de una v.a. con una función más operativa que la función de distribución ya que va a depender de los valores que toma la v.a. y, para ello, vamos hacer la distinción entre v.a. discreta y v.a. continua.

3 Variable aleatoria discreta

Si X es una v.a. discreta $\Rightarrow$ X toma un número finito o infinito numerable de valores; esto es, Rango de $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, o bien, Rango de $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$.

`Definición:` Definimos la **función puntual de probabilidad (fpp)** de una variable aleatoria X como la función

$$f_X = f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

dada por

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_X(x) = f(x) = P(X = x) = P(\{w \in \Omega \ / \ X(w) = x\})}$$

`Ejemplo:` Experimento aleatorio: Lanzamos 3 veces una moneda equilibrada
$\Rightarrow \Omega = \{ccc, ccx, cxc, xcc, cxx, xcx, xxc, xxx\}$
Definimos la variable aleatoria X_1=N^o caras obtenidas en los tres lanzamientos $\Rightarrow$

$$\begin{array}{rccc}
X_1 : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& ccc & \hookrightarrow & 3 \\
& \left.\begin{array}{c} ccx \\ cxc \\ xcc \end{array}\right\} & \hookrightarrow & 2 \\
& \left.\begin{array}{c} cxx \\ xcx \\ xxc \end{array}\right\} & \hookrightarrow & 1 \\
& xxx & \hookrightarrow & 0
\end{array}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
f(0) &= P(X = 0) = P(\{xxx\}) = \frac{1}{8} \\
f(1) &= P(X = 1) = P(\{cxx, xcx, xxc\}) = \frac{3}{8} \\
f(2) &= P(X = 2) = P(\{ccx, cxc, xcc\}) = \frac{3}{8} \\
f(3) &= P(X = 3) = P(\{ccc\}) = \frac{1}{8} \\
f(x) &= 0\text{, en otro caso}
\end{aligned}$$

La función puntual de probabilidad de la variable aleatoria X la podemos escribir en forma de tabla como sigue:

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

▲ **Distribución de probabilidad de la v.a. X DISCRETA**

Propiedades de la función puntual de probabilidad:

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \;\; f(x) \geq 0$
2. $\sum\limits_{\forall x} f(x) = 1$

- Además mediante la función puntual de probabilidad de X nos permite calcular la función de distribución de la v.a. X:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = F(x) = P(X \leq x) = \sum_{\forall t / t \leq x} f(t)}$$

  $\Rightarrow F_X = F$ es una función escalonada con saltos en los puntos de probabilidad no nula.

- Y nos permite calcular la probabilidad asociada a sucesos de la v.a. X:

$$\boxed{\forall A \subset \mathbb{R}, \quad P(X \in A) = \sum_{\forall x / x \in A} f(x)}$$

4 Variable aleatoria continua

Si X es una v.a. continua $\Rightarrow$ X toma un número infinito no numerable de valores, esto es, el Rango de X es un intervalo de $\mathbb{R}$.

`Definición:` Definimos la **función de densidad (fd)** de una variable aleatoria X como la función

$$f_X = f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

verificando que:

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \;\; f(x) \geq 0$
2. $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$

En resumen, una **función de densidad es toda función positiva que engendra un area igual a la unidad**.

- Además mediante la función de densidad de X nos permite calcular la función de distribución de la v.a. X:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_X(x) = F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt} \Rightarrow$$

  $\Rightarrow$ $\forall x$ en los que exista la derivada de $F(x)$ se tiene que $F'(x) = f(x)$.

- Y nos permite calcular la probabilidad asociada a sucesos de la v.a. X:

$$\boxed{\forall A \subset \mathbb{R}, \quad P(X \in A) = \int_{\mathbb{A}} f(x)dx}$$

  De donde, $\forall a, b \in \mathbb{R}$, con $a < b$ se tiene que

$$\boxed{P(a \leq X \leq b) = P(X \in [a, b]) = \int_{a}^{b} f(x)dx}$$

Consecuencia:

$$P(X = a) = P(a \leq X \leq a) = \int_a^a f(x)dx = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ Los sucesos puntuales tienen probabilidad cero}$$

$$\Rightarrow \text{ La función de distribución es continua}$$

Entonces:

$$\boxed{P(a \leq X \leq b) = P(a < X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a)}$$

5 Características de una variable aleatoria

El objetivo de esta sección es, dada una v.a. X, estudiar entorno a qué valor esperamos el resultado (medida de posición central de la v.a. X) y cómo es la variabilidad de X (medida de dispersión de la v.a. X).

`Definición:` Sea X una v.a. con $f(x)$ su distribución de probabilidad ($f(x)$ es la fpp si X es discreta o es la fd si X es continua), definimos la **media** o **esperanza** de X como

$$\boxed{E(X) = \mu_X = \mu = \begin{cases} \sum_x x \cdot f(x) & \text{si } X \text{ es discreta} \\ \\ \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x)dx & \text{si } X \text{ es continua} \end{cases}}$$

y diremos que existe la $E(X)$ si la suma o la integral que la definen son convergentes.

`Notas:`

- La $E(X)$ es un promedio no es un posible valor de la v.a. X.
- La $E(X)$ puede no existir.
- La $E(X)$ se introdujo originalmente ligado a los juegos de azar como el beneficio que se espera obtener en el juego.

`Ejemplos:`

1. Sea X una v.a. discreta con fpp dada por:

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.13	0.37	0.37	0.13

Entonces la esperanza de X sería:

$$E(X) = \sum_x x \cdot f(x) = 0 \times 0.13 + 1 \times 0.37 + 2 \times 0.37 + 3 \times 0.13 = 1.5$$

2. Sea X una v.a. continua con fd dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1) \\ 2-x, & x \in (1,2) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Entonces la esperanza de X sería:

$$E(X) = \int_{\mathbb{R}} x \cdot f(x)dx = \int_0^1 x \cdot xdx + \int_1^2 x \cdot (2-x)dx = 1$$

`Definición:` Sea X una v.a. con $f(x)$ su distribución de probabilidad, y sea $Y = g(X)$ una función de la v.a. X. Definimos la **media** o **esperanza** de Y o $g(X)$ como

$$\boxed{E(Y) = E\left[g(X)\right] = \begin{cases} \sum_x g(x) \cdot f(x) & \text{si } X \text{ es discreta} \\ \\ \int_{\mathbb{R}} g(x) \cdot f(x)dx & \text{si } X \text{ es continua} \end{cases}}$$

y diremos que existe la $E(Y)$ si la suma o la integral que la definen son convergentes.

Propiedades de los valores esperados:

Sea X una v.a. tal que existe su $E(X)$, entonces:

1. $E(aX) = aE(X)$, $\forall a \in \mathbb{R}$
2. $E(X+b) = E(X) + b$, $\forall b \in \mathbb{R}$
3. $E(aX+b) = aE(X) + b$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$ ($\Rightarrow$ el operador esperanza es lineal)

`Definición:` Sea X una v.a. tal que existe su $E(X)$. Definimos la **varianza** de X como

$$\boxed{Var(X) = \sigma_X^2 = \sigma^2 = E\{[X - E(X)]^2\} = E(X^2) - (E(X))^2}$$

y la **desviación típica** o **estándar** de X como

$$\boxed{\sigma_X = \sigma = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{E(X^2) - (E(X))^2}}$$

`Ejemplos:`

1. Sea X una v.a. discreta con fpp dada por:

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.13	0.37	0.37	0.13

Hemos visto que la $E(X) = 1.5$, calculemos la varianza de la v.a. X:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_x x^2 \cdot f(x) - (1.5)^2 = \\ &= \left[0^2 \times 0.13 + 1^2 \times 0.37 + 2^2 \times 0.37 + 3^2 \times 0.13\right] - (1.5)^2 = 3.02 - 2.25 = 0.77 \\ &\Rightarrow \sigma = \sqrt{0.77} \simeq 0.8775 \end{aligned}$$

2. Sea X una v.a. continua con fd dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in (0,1) \\ 2 - x, & x \in (1,2) \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Hemos visto que la $E(X) = 1$, calculemos la varianza de la v.a. X:

$$\begin{aligned} Var(X) &= E(X^2) - (E(X))^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 \cdot f(x)dx - 1^2 = \\ &= \left[\int_0^1 x^2 \cdot xdx + \int_1^2 x^2 \cdot (2-x)dx\right] - 1 = \frac{7}{6} - 1 = \frac{1}{6} \\ &\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{1}{6}} \simeq 0.4082 \end{aligned}$$

Propiedades de la varianza:

Sea X una v.a. tal que existe su $Var(X)$, entonces:

1. $Var(aX) = a^2 Var(X)$, $\forall a \in \mathbb{R}$
2. $Var(X + b) = Var(X)$, $\forall b \in \mathbb{R}$
3. $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$

6 Desigualdad de Tchebychev

Si bien, para calcular probabilidades es necesario conocer la distribución o la función puntual de probabilidad (discretas) o función de densidad (continuas), la Desigualdad de Tchebychev nos permite, conociendo la esperanza, $E(X)$, y la varianza, $Var(X)$, de una variable aleatoria, acotar la probabilidad de que dicha variable tome valores en intervalos simétricos centrados en la media; esto es, intervalos de la forma

$$(E(X) - \epsilon, E(X) + \epsilon)$$

donde ϵ depende de la $Var(X)$.

La desigualdad de Tchebychev nos da una garantía mínima de la probabilidad de que la v.a. X asuma un valor dentro de k desviaciones típicas alrededor de la media. Aunque la garantía no es muy precisa, tiene la ventaja de poder aplicarse a cualquier distribución de probabilidad (ya sea discreta o contínua) que tenga media y varianza finitas.

6.1 Desigualdad de Tchebychev

Sea X una v.a. tal que existe la $E(X) = \mu$ y la $Var(X) = \sigma^2$
$\Rightarrow$

$$\forall \lambda > 0, \qquad P(\mu - \lambda\sigma < X < \mu + \lambda\sigma) = P(\mid X - \mu \mid < \lambda\sigma \geq 1 - \frac{1}{\lambda^2}$$

siendo λ una constante positiva convenientemente seleccionada en función del intervalo sobre el que estemos interesados.

`Consecuencias:`

Sea X una variable cualesquiera con media y varianza conocida. Entonces:

- $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \geq 3/4$
- $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \geq 8/9$

7 DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD DISCRETAS

7.1 Distribución de Bernoulli

Consideremos un experimento aleatorio que sólo puede tomar dos posibles valores, o bien obtenemos A ($\equiv$ **éxito**) con probabilidad p, o bien obtenemos $\overline{A}$ ($\equiv$ **fracaso**) con probabilidad $1-p$. Un experimento de este tipo se denomina **experimento dicotómico.**

Definimos la variable aleatoria $X =$ **Número de éxitos obtenidos** $\Rightarrow$

$$X = \begin{cases} 0, & \big(\text{si obtenemos } \overline{A}\big) \quad \text{con probabilidad } 1-p \\ 1, & (\text{si obtenemos } A) \qquad \text{con probabilidad } p \end{cases}$$

$\Longrightarrow$La **función puntual de probabilidad** de la v.a. X es:

x	0	1
$f(x)$	$1-p$	p

$\Leftrightarrow$ $\boxed{f(x) = p^x(1-p)^{1-x} \quad \text{con} \quad x = 0, 1}$

$\Longrightarrow$

La v.a. X sigue una **distribución de Bernoulli de parámetro** p,

o bien,

$$X \sim b(p) \quad \text{donde} \quad p = P(\acute{e}xito)$$

Características de la distribución de Bernoulli:

- $E(X) = p$
- $Var(X) = p(1-p)$

`Ejemplo:`

Número de caras obtenidas al lanzar una moneda equilibrada $\sim b(p = 1/2)$

7.2 Distribución Binomial

Consideremos el experimento dicotómico anterior que se repite n veces bajo las condiciones siguientes:

1. En cada una de las repeticiones sólo podemos obtener A ($\equiv$ **éxito**) con probabilidad p, o bien, obtenemos $\overline{A}$ ($\equiv$ **fracaso**) con probabilidad $1-p$.

2. La $P(A) = p$ y la $P(\overline{A}) = 1-p$ se mantienen constantes en las n repeticiones del experimento dicotómico.

3. Las realizaciones se llevan a cabo de manera independiente.

Definimos la variable aleatoria

$X =$ **Número de éxitos obtenidos en las n repeticiones del experimento**

$\Rightarrow$

La **función puntual de probabilidad** de la v.a. X es:

$$\boxed{f(x) = P(X = x \text{ éxitos}) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \qquad \text{con} \;\; x = 0, 1, 2, \cdots, n}$$

$\Longrightarrow$

La v.a. X sigue una **distribución de Binomial de parámetros** n y p,

o bien,

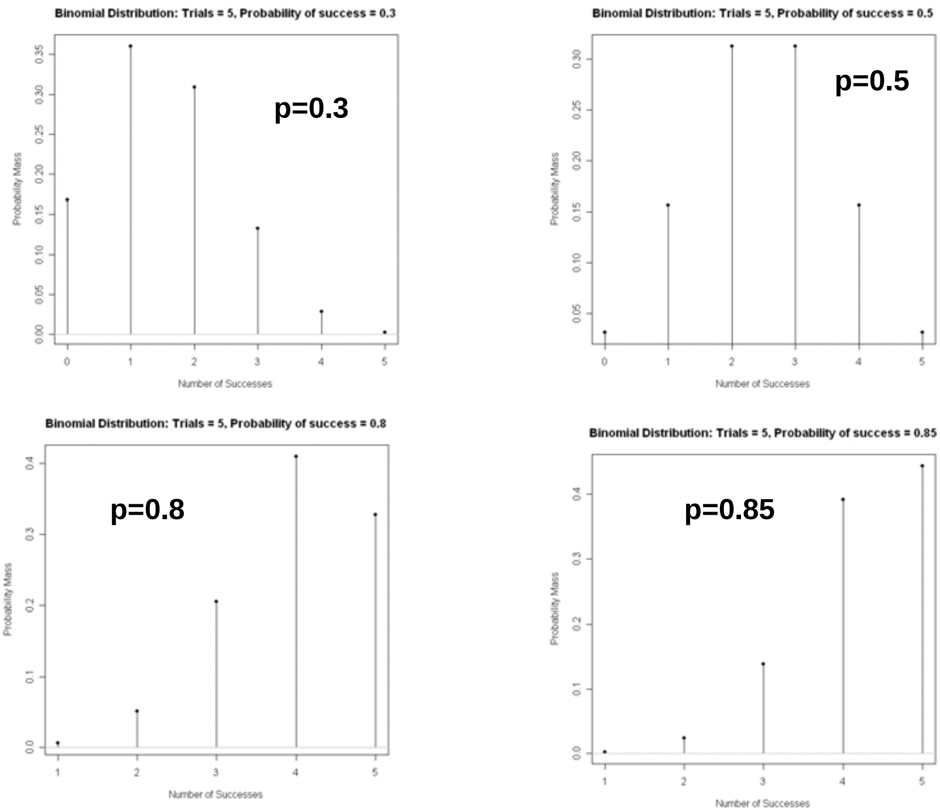
$X \sim B(n,p)$ donde $n =$ **número de realizaciones** y $p = P(\textit{éxito})$

<u>Características de la distribución Binomial</u>:

- $E(X) = np$

- $Var(X) = np(1-p)$

Gráficas de la función puntual de probabilidad de la distribución Binomial con n = 5 y varios valores de p:



Ejemplos:

1. Número de caras obtenidas al lanzar 500 veces una moneda equilibrada $\sim B(500, p = 1/2)$.

2. Número de piezas defectuosas en una muestra de tamaño $n \sim B(n, p)$ donde p =probabilidad de obtener una pieza defectuosa en dicho proceso productivo.

3. La distribución binomial está asociada al muestreo aleatorio CON reemplazamiento.

   `Por ejemplo:` Tenemos la siguiente urna

$$\begin{array}{|c|}\text{7 } bolas\ ROJAS \\ \text{3 } bolas\ AZULES \\ \text{2 } bolas\ NEGRAS \\ \hline\end{array}$$

   y extraemos tres bolas CON reemplazamiento $\Rightarrow$

   En cada extracción,

$$P(EXITO) = P(obtener\ bola\ ROJA) = \frac{7}{12}$$

$$P(FRACASO) = P(obtener\ NO\ obtener\ bola\ ROJA) = \frac{5}{12}$$

   y estas probabilidades se mantienen constantes ya que las extracciones son con reemplazamiento.

   Entonces la v.a. X = Número de **bolas rojas** ($\equiv$**éxito**) extraídas $\sim\ B(3,\ p = \frac{7}{12})$.

7.3 Distribución de Poisson

Consideremos los siguientes ejemplos de variables aleatorias:

1. Número de llamadas que llegan a una centralita en un determinado periodo de tiempo.

2. Número de defectos en un determinado trozo de tela.

3. Número de visitas a una página web en un determinado periodo de tiempo.

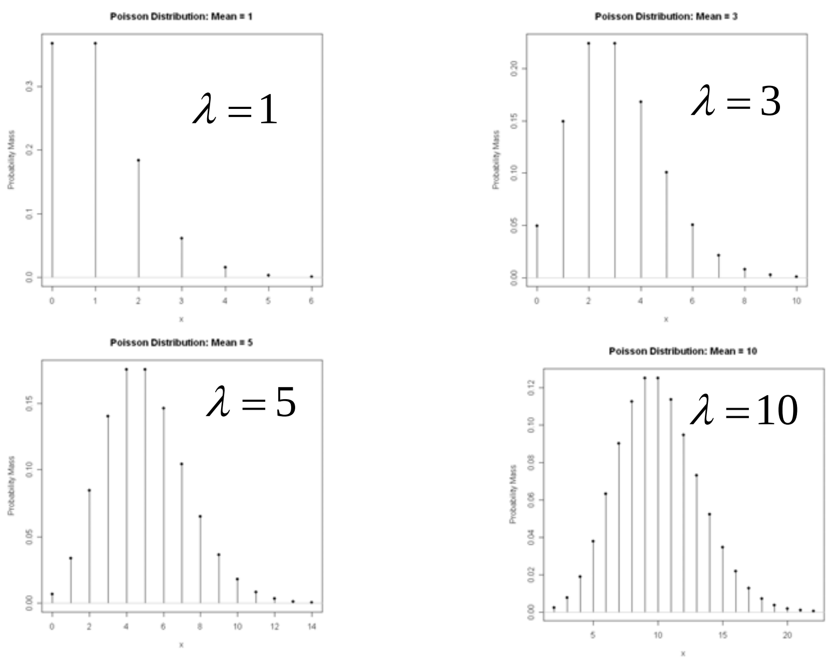
Todos ellos contabilizan el número de acontecimientos de un cierto suceso que ocurren en un determinado periodo de tiempo o espacio.

Para una amplia gama de problemas de este tipo, la **distribución de Poisson** representa de manera adecuada el comportamiento aleatorio de la variable.

Una variable aleatoria X sigue una **distribución de Poisson de parámetro** λ, o bien, $X \sim P_o(\lambda)$, si su **función puntual de probabilidad** es:

$$\boxed{f(x) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} \quad \text{con} \quad x = 0, 1, 2, 3, \cdots}$$

Gráficas de la función puntual de probabilidad de la distribución de Poisson para distintos valores de $\boldsymbol{\lambda}$:



Para que una variable de recuento siga una distribución de Poisson debe verificarse las tres condiciones siguientes:

1. En un intervalo infinitesimal, la probabilidad de que ocurra un evento es proporcional a la longitud del intervalo.
2. La probabilidad de que ocurran dos o más sucesos en un intervalo infinitesimal es prácticamente nula.
3. El número de ocurrencias en un intervalo infinitesimal no depende de lo que ocurra en cualquier otro intervalo infinitesimal que no se solape con aquel.

Características de la distribución de Poisson:

- $E(X) = \lambda \Longrightarrow \lambda$ es el **número medio de ocurrencias**
- $Var(X) = \lambda \Rightarrow \sigma_X = \sqrt{\lambda}$

Una propiedad importante de la distribución de Poisson es que es **reproductiva** o **aditiva**. Es decir, la suma de dos o más distribuciones de Poisson es una distribución de Poisson cuyo parámetro es la suma de los parámetros de las distribuciones que sumamos. (Resultado que será enunciado formalmente después del concepto de independencia).

Aproximación Poisson de la distribución Binomial

Si $X \sim B(n,p)$, entonces cuando $n \longrightarrow \infty$ y $p \longrightarrow 0$ se puede probar que

$$P(X=x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{1-x} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!}$$

siendo $\lambda = np$.

Es decir,

$$\boxed{B(n,p) \approx P_o(\lambda = np)}$$

La aproximación es bastante aceptable en el caso:

$$\boxed{n \geq 25 \quad y \quad p \leq 0.1 \quad \text{tal que} \quad \lambda = np \leq 5}$$

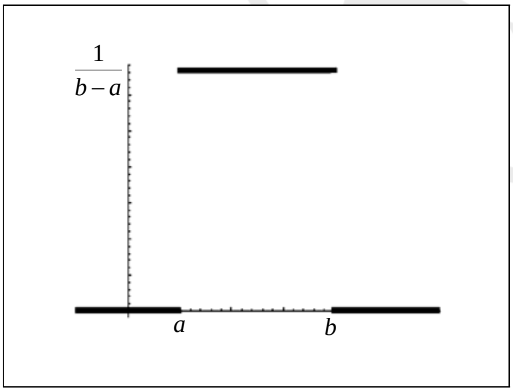
8 DISTRIBUCIONES DE PROBABILIDAD CONTINUAS

8.1 Distribución Uniforme Continua

Una variable aleatoria continua X sigue una **distribución Uniforme Continua** en el intervalo$[a, b]$, si su **función de densidad** es:

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{(b-a)}, & x \in [a, b] \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}}$$

cuya gráfica es:



Se representa por $X \sim U(a, b)$.

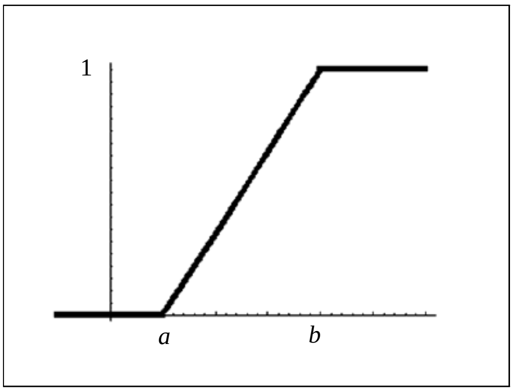
Su **función de distribución** definida por

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

viene dada por:

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 1, & x > b \end{cases}}$$

y su gráfica es:



Características de la distribución Uniforme Continua:

- $E(X) = \dfrac{(a+b)}{2}$

- $Var(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$

`Ejemplos`:

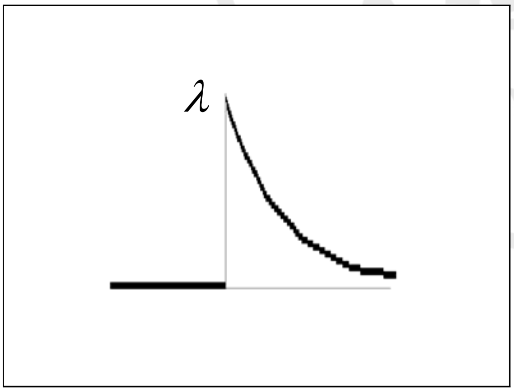
La distribución uniforme es útil para describir una variable aleatoria con probabilidad constante en el intervalo [a,b]. Además presenta una peculiaridad importante: la probabilidad de un suceso dependerá exclusivamente de la amplitud del intervalo considerado y no de su posición en el campo de variación de la variable aleatoria.
La distribución uniforme tiene un papel importante en la simulación por ordenador de los valores de una v.a. con una determinada distribución de probabilidad mediante la transformada inversa de probabilidad.

8.2 Distribución Exponencial

Una variable aleatoria continua X sigue una **distribución exponencial de parámetro** λ (con $\lambda > 0$), si su **función de densidad** es:

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}}$$

cuya gráfica es:



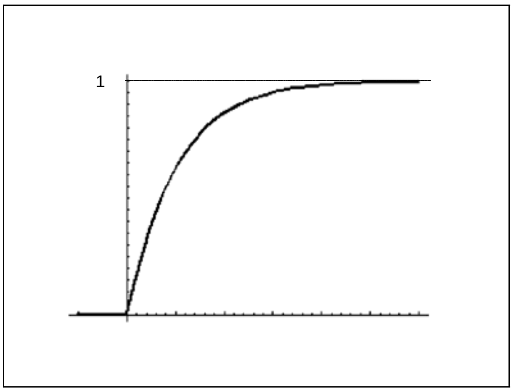
Se representa por $X \sim Exp(\lambda)$.
Su **función de distribución** definida por:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

viene dada por:

$$\boxed{F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}}$$

y su gráfica es:



Notar que:

$$P(X > x) = e^{-\lambda x}, \quad \forall x > 0$$

Características de la distribución Exponencial:

- $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$
- $Var(X) = \dfrac{1}{\lambda^2}$

`Ejemplos:`

1. La distribución exponencial se emplea para modelizar tiempos de vida, duraciones de componentes de ciertos sistemas, etc....
2. Está relacionada con la distribución de Poisson, ya que modeliza el tiempo transcurrido entre dos sucesos sucesivos de una distribución de Poisson.

Proposición:

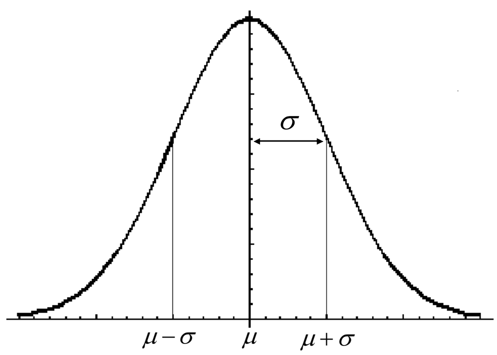
Si la v.a X, definida como el número de ocurrencias de un cierto suceso en el tiempo t, sigue una distribución de Poisson de parámetro λ, entonces la v.a. $Y =$ el tiempo transcurrido entre dos ocurrencias consecutivas del suceso es una distribución exponencial de parámetro $\dfrac{\lambda}{t}$.

8.3 Distribución Normal o de Gauss.

Una variable aleatoria X sigue una **distribución Normal de parámetros** μ y σ (con $\mu \in R$ y $\sigma > 0$) y se representa por $X \sim N(\mu, \sigma)$, si su **función de densidad** es:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

Su representación gráfica viene dada por:



__Características de la distribución Normal:__

- Observando la gráfica podemos establecer que es simétrica respecto de μ, presenta un máximo en $x = \mu$ y dos puntos de inflexión en $\mu - \sigma$ y $\mu + \sigma$.

- Se puede comprobar que:

$$\boxed{\begin{array}{l} E(X) = \mu \\ \\ Var(X) = \sigma^2 \quad \Rightarrow \text{ La desviación típica o estándar de } X \text{ es } \sigma \end{array}}$$

Su **función de distribución** dada por:

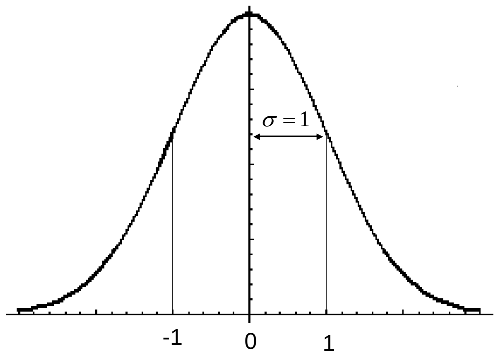
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\; e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$

no tiene una expresión explícita, por lo que para su cálculo, se recurre a tablas o a programas de ordenador.

► Cada par de (μ, σ) proporciona una curva dentro de la misma familia. En particular, cuando $\mu = 0$ y $\sigma = 1$ se obtiene la **distribución Normal Estándar** representada por $Z \sim N(0, 1)$ y cuya **función de densidad** es:

$$\boxed{f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}, \quad \forall z \in \mathbb{R}}$$

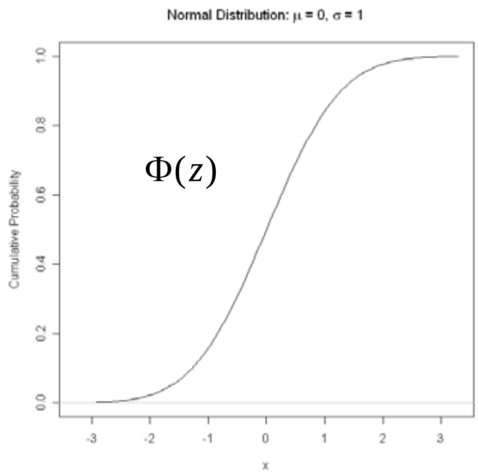
Su representación gráfica viene dada por:



Su **función de distribución**

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad \Phi(z) = P(Z \leq z) = \int_{-\infty}^{z} f(t)dt = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{t}{2}^2} dt$$

está tabulada y su gráfica es:



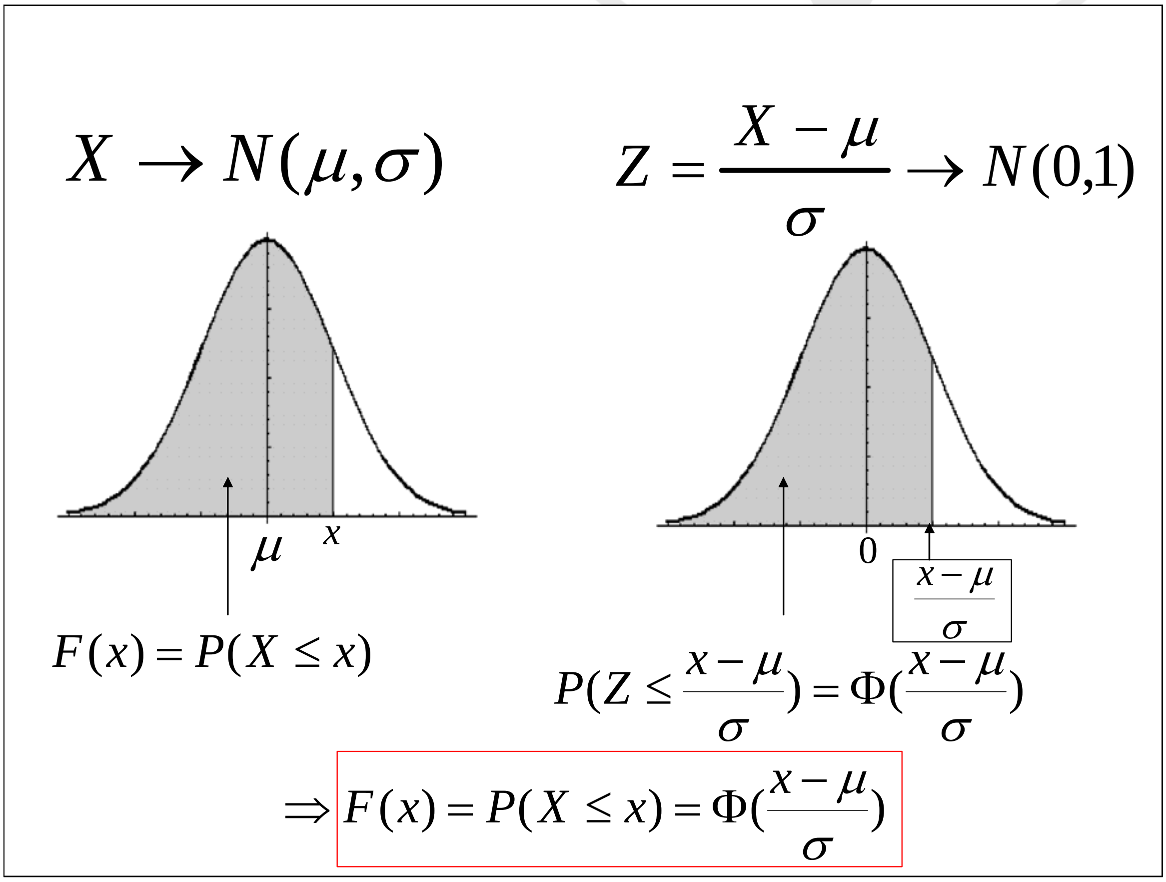
Propiedades de la distribución Normal:

- Tipificar la distribución normal general: Si $X \sim N(\mu, \sigma) \implies Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

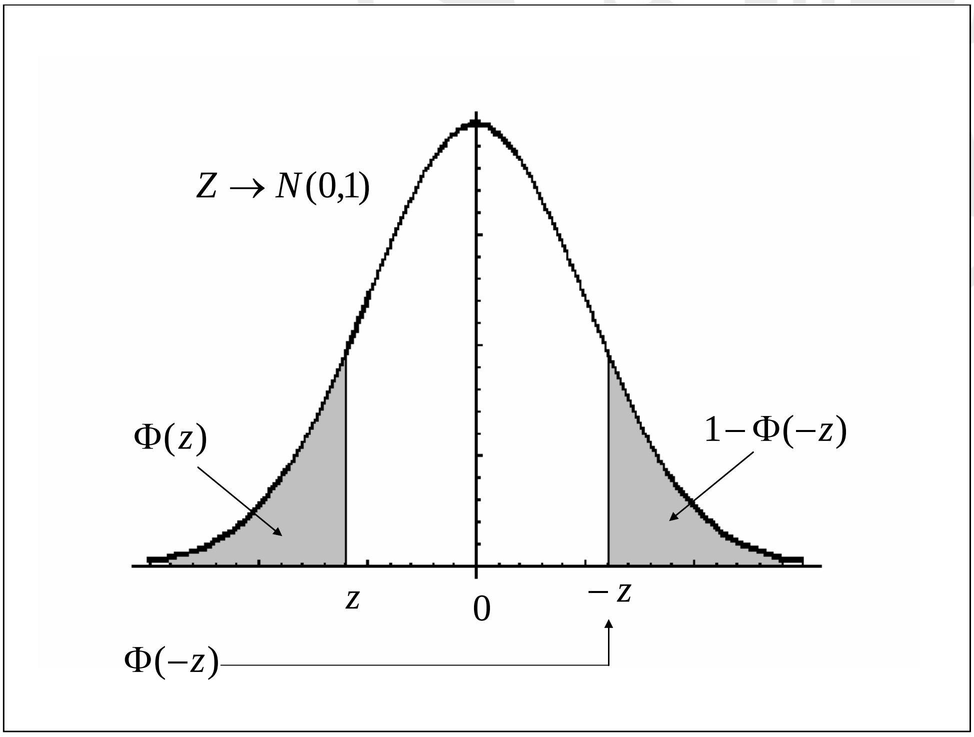
  Además

$$F(x) = P(X \le x) = P(\underbrace{\frac{X-\mu}{\sigma}}_{Z} \le \frac{x-\mu}{\sigma}) = P(Z \le \frac{x-\mu}{\sigma}) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})$$

$$\implies \boxed{F(x) = \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})}$$

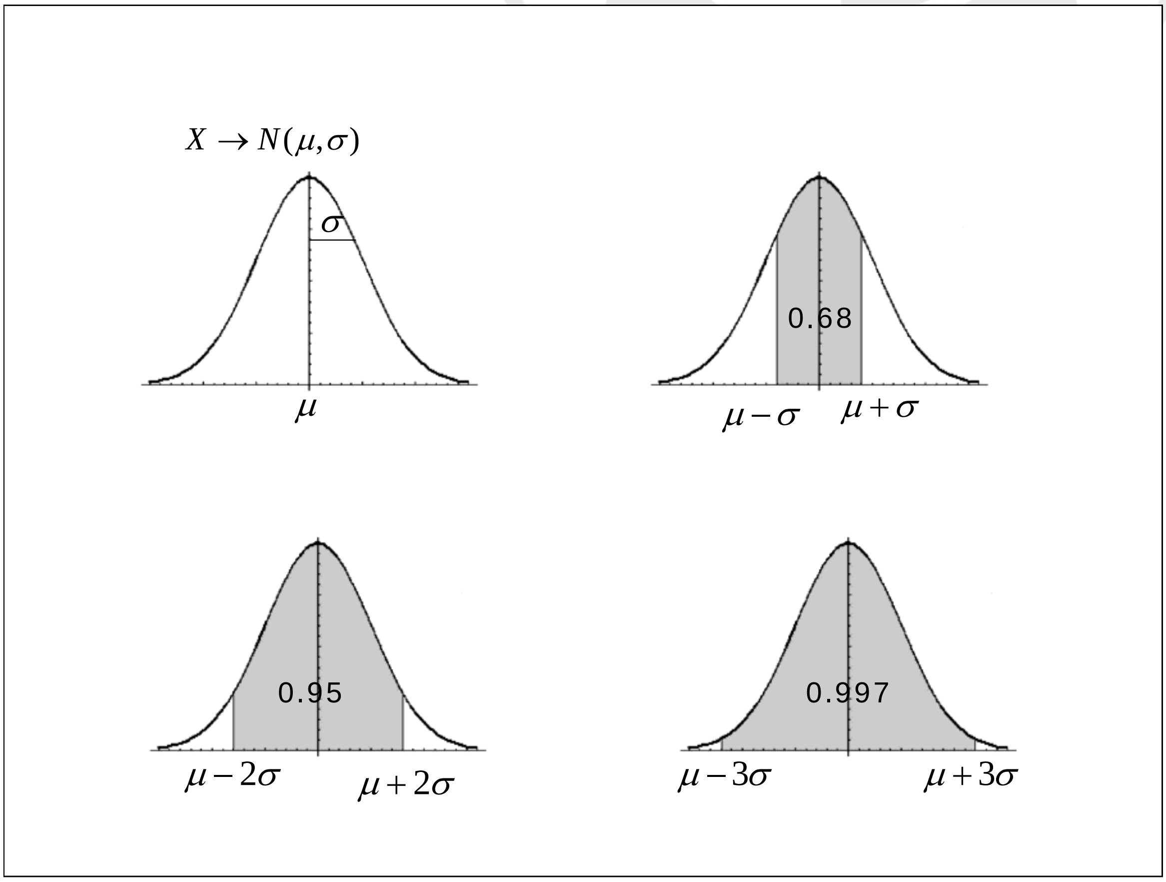


- Simetría: Si $Z \sim N(0,1) \implies \forall z < 0$, tenemos que $\Phi(z) = 1 - \Phi(-z)$ por la simetría de la distribución normal.



- Regla del 68-95-99.7: Si $X \sim N(\mu, \sigma) \implies$

$$
\begin{aligned}
P(\mu - \sigma &\leq X \leq \mu + \sigma) = 0.68 \\
P(\mu - 2\sigma &\leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0.95 \\
P(\mu - 3\sigma &\leq X \leq \mu + 3\sigma) = 0.997
\end{aligned}
$$



Teorema de De Moivre-Laplace: Aproximación Normal de la distribución Binomial:

Sea $X \sim B(n, p)$ tal que $np > 5$ y $np(1-p) > 5$,

entonces

$$X \approx W, \text{ donde } W \sim N(\mu = np, \sigma = \sqrt{np(1-p)})$$

Para mejorar esta aproximación se usa la *corrección por continuidad* que implica que:

$$\boxed{P(X = a) \cong P(a - 1/2 \leq W \leq a + 1/2)}$$

(Nos movemos media unidad a ambos lados del entero a, dependiendo del intervalo de interés).

Entonces:

$$\begin{aligned} P(a &\leq X \leq b) \cong P(a - 1/2 \leq W \leq b + 1/2) \\ P(a &\leq X < b) \cong P(a - 1/2 \leq W \leq b - 1/2) \\ P(a &< X \leq b) \cong P(a + 1/2 \leq W \leq b + 1/2) \\ P(a &< X < b) \cong P(a + 1/2 \leq W \leq b - 1/2) \end{aligned}$$

Ejemplos:

1. La distribución normal es una de las más utilizadas, de ahí su nombre, y se emplea para modelizar mediciones efectuadas en seres vivos (pesos, alturas, longitud de huesos, etc...), temperaturas, o, en general, variables que pueden considerarse como sumas de pequeños incrementos (resistencias frente a torsiones o elongaciones, errores en las mediciones científicas, etc...).
2. Originalmente, Gauss la utilizó para modelizar los errores en las mediciones astronómicas por lo que también se conoce como distribución gaussiana o campana de Gauss.