Tema 4: VARIABLES ALEATORIAS BIDIMENSIONALES

1 Concepto de variable aleatoria bidimensional

Sea Ω el espacio muestral de un experimento aleatorio. Definimos **variable aleatoria bidimensional**, como una aplicación

$$(X,Y):\Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

tal que $\forall w \in \Omega$,

$$\begin{array}{rccc} (X,Y): & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & w & \hookrightarrow & (X(w),Y(w)) \in \mathbb{R}^2 \end{array}$$

Las variables aleatorias bidimensionales se puede dividir en:

- **Discretas:** Cuando X e Y son v.a. discretas.
- **Continuas:** Cuando X e Y son v.a. continuas.
- **Mixtas:** Cuando una de las variables es discreta y la otra continua.

2 Variables aleatorias bidimensionales discretas

`Ejemplo:` Consideremos el experimento aleatorio de lanzar 3 veces una moneda trucada tal que

$$P(cara \equiv c) = 2/3$$
y
$$P(cruz \equiv x) = 1/3$$

El espacio muestral consta de 8 resultados:

$$\Omega = \{ccc, ccx, cxc, xcc, cxx, xcx, xxc, xxx\}$$

Definimos las variables aleatorias:

$$X = \textbf{N}^o \textbf{ de caras obtenidas en el primer lanzamiento} \rightarrow \{0,1\}$$

$$Y = \textbf{N}^o \textbf{ total de cara obtenidas en los tres lanzamientos} \rightarrow \{0,1,2,3\}$$

 Escuela Técnica Superior de Ingeniería Agronómica.
Universidad Politécnica de Cartagena.
Curso acedémico: 2011-2012

Podemos considerar la **variable aleatoria bidimensional** (X,Y) que toma los valores:

$$\begin{array}{rccc} (X,Y): & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & ccc & \hookrightarrow & (1,3) \\ & \left.\begin{array}{c} ccx \\ cxc \end{array}\right\} & \hookrightarrow & (1,2) \\ & xcc & \hookrightarrow & (0,2) \\ & cxx & \hookrightarrow & (1,1) \\ & \left.\begin{array}{c} xcx \\ xxc \end{array}\right\} & \hookrightarrow & (0,1) \\ & xxx & \hookrightarrow & (0,0) \end{array}$$

con las siguientes probabilidades:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= P(X=0,Y=0) = p(\{xxx\}) = (p(x))^3 = 1/27 \\ f(0,1) &= P(X=0,Y=1) = p(\{xcx, xxc\}) = 2\,(p(x))^2\,p(c) = 4/27 \\ f(1,1) &= P(X=1,Y=1) = p(\{cxx\}) = P(c)\,(p(x))^2 = 2/27 \\ f(0,2) &= P(X=0,Y=2) = p(\{xcc\}) = p(x)\,(p(c))^2 = 4/27 \\ f(1,2) &= P(X=1,Y=2) = p(\{ccx, cxc\}) = 2\,(p(c))^2\,p(x) = 8/27 \\ f(1,3) &= P(X=1,Y=3) = p(\{ccc\}) = (p(c))^3 = 8/27 \end{aligned}$$

que las podemos escribir en una tabla de doble entrada como sigue:

$Y \rightarrow$ / $X \downarrow$	0	1	2	3
0	1/27	4/27	4/27	0
1	0	2/27	8/27	8/27

▲ **Función Puntual de Probabilidad Conjunta de** (X,Y)

que es la función

$$f_{(X,Y)} = f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida por:

$$\boxed{f(x,y) = P(X=x, Y=y) = P\left(\{w \in \Omega \;/\; [(X(w), Y(w)] = (x,y)\}\right), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}}$$

y verificando que:

1. $f(x,y) \geq 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
2. $\sum_x \sum_y f(x,y) = \sum_y \sum_x f(x,y) = 1$

Además, mediante la f.p.p. conjunta podemos obtener probabilidades asociadas a la v.a. bidimensional (X,Y):

$$\boxed{\forall A \subset \mathbb{R}^2, \quad P\left[(X,Y) \in A\right] = \sum\sum_{(x,y)\,\in A} f(x,y)}$$

2.1 Distribuciones Marginales de X e Y

- La **función puntual de probabilidad marginal de** X:

$$\boxed{f_X(x) = P(X = x) = \sum_{y \in \mathbb{R}} f(x,y), \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

(implica sumar por filas)

- La **función puntual de probabilidad marginal de** Y:

$$\boxed{f_Y(y) = P(Y = y) = \sum_{x \in \mathbb{R}} f(x,y), \quad \forall y \in \mathbb{R}}$$

(implica sumar por columnas)

Y se pueden presentar en la tabla de doble entrada en la columna de la derecha y la fila inferior, respectivamente:

$Y \rightarrow$ / $X \downarrow$	0	1	2	3	$f_X \downarrow$
0	1/27	4/27	4/27	0	9/27
1	0	2/27	8/27	8/27	18/27
$f_Y \rightarrow$	1/27	6/27	12/27	8/27	1

2.2 Distribuciones Condicionadas de X e Y

- La **función puntual de probabilidad de** X **condicionada a que** $Y = b$ se define:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_{X/b}(x/b) = P(X = x/Y = b) = \frac{P(X = x, Y = b)}{P(Y = b)} = \frac{f(x,b)}{f_Y(b)}}$$

siempre que $f_Y(b) > 0$.

- La **función puntual de probabilidad de** Y **condicionada a que** $X = a$ se define:

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \qquad f_{Y/a}(y/a) = P(Y = y/X = a) = \frac{P(X = a, Y = y)}{P(X = a)} = \frac{f(a,y)}{f_X(a)}}$$

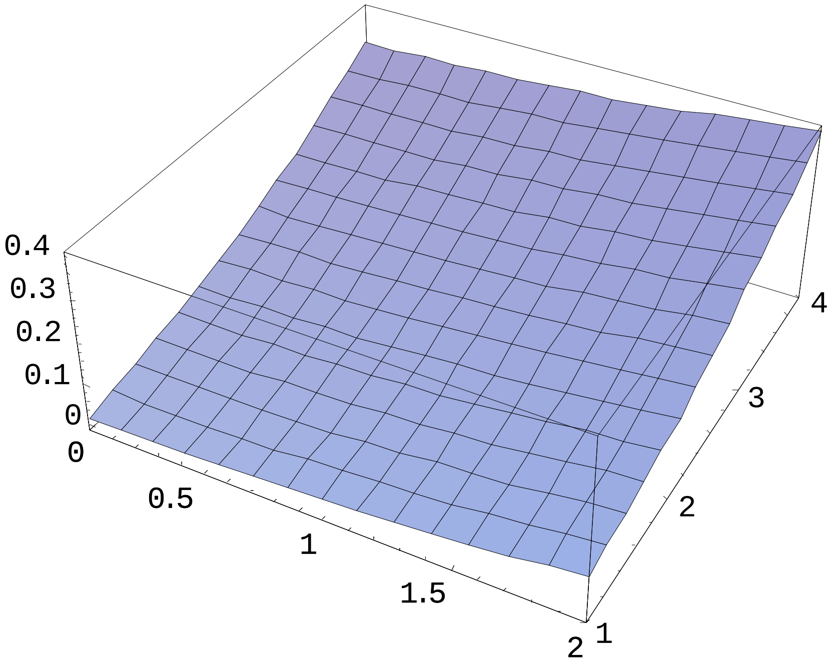
siempre que $f_X(a) > 0$.

3 Variables aleatorias bidimensionales continuas

`Ejemplo:` Sea (X, Y) una variable aleatoria continua con **Función de Densidad Conjunta** dada por:

$$\boxed{f(x,y) = \frac{1}{50}(x^2+y^2), \text{ si } \begin{array}{c} 0 \le x \le 2 \\ 1 \le y \le 4 \end{array}}$$

y cuya gráfica es:



Notar que la **función de densidad conjunta** de una variable aleatoria bidimensional continua (X, Y) la definimos como la función

$$f_{(X,Y)} = f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$

verificando que:

1. $f(x,y) \ge 0, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$
2. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dxdy = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x,y)dydx = 1$

Además, mediante la f.d. conjunta podemos obtener probabilidades asociadas a la v.a. bidimensional (X, Y):

$$\boxed{\forall A \subset \mathbb{R}^2, \quad P\left[(X,Y) \in A\right] = \int\int_A f(x,y)dxdy}$$

3.1 Distribuciones Marginales de X e Y

- La **función de densidad marginal de** X:

$$\boxed{f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y) \cdot dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}}$$

- La **función de densidad marginal de** Y:

$$\boxed{f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y) \cdot dx, \quad \forall y \in \mathbb{R}}$$

3.2 Distribuciones Condicionadas de X e Y

- Sea $b \in \mathbb{R}$ tal que $f_Y(b) > 0$, entonces se define la **función de densidad de** X **condicionada a un valor concreto** b **de la v.a.** Y como:

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f_{X/b}(x/b) = \frac{f(x,b)}{f_Y(b)}} \qquad \text{siempre que } f_Y(b) > 0$$

- Sea $a \in \mathbb{R}$ tal que $f_X(a) > 0$, entonces se define la **función de densidad de** Y **condicionada a un valor concreto** a **de la v.a.** X como:

$$\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \qquad f_{Y/a}(y/a) = \frac{f(a,y)}{f_X(a)}} \qquad \text{siempre que } f_X(a) > 0$$

4 Independencia de variables aleatorias

Las variables aleatorias X e Y **son independientes** si verifican:

- $f(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y), \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$
- $f_{X/b}(x/b) = f_X(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$
- $f_{Y/a}(y/a) = f_Y(y), \quad \forall y \in \mathbb{R}$

donde:

- $f(x,y)$ es la función puntual de probabilidad conjunta si (X,Y) es DISCRETA, o bien, la función de densidad conjunta si (X,Y) es CONTINUA.
- $f_X(x)$ y $f_Y(y)$ son las funciones puntuales de probabilidad marginal de X e Y si X e Y son DISCRETAS, o bien, las funciones de densidad marginal de X e Y si X e Y son CONTINUAS.
- $f_{X/b}(x/b)$ y $f_{Y/a}(y/a)$ son las distribuciones condicionadas de X e Y, respectivamente.

5 Propiedades de la esperanza y la varianza

1. Sean X e Y variables aleatorias tal que existen la $E(X)$ y la $E(Y)$ entonces
   (a) $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$
   (b) $E(aX \pm bY) = aE(X) \pm bE(Y)$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$
2. Sean X e Y variables aleatorias **independientes** tal que existe la $Var(X)$ y la $Var(Y)$, entonces se verifica que:
   (a) $Var(X \pm Y) = Var(X) + Var(Y)$
   (b) $Var(aX \pm bY) = a^2 Var(X) + b^2 Var(Y)$, $\forall a,b \in \mathbb{R}$

Ambas propiedades se puede generalizar a n de variables aleatorias como sigue:

- Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias tal que existe la $E(X_i)$ $\forall i = 1, 2, ...n$, entonces se verifica que:
$$E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$$
o bien, $\forall a_i \in \mathbb{R}$
$$E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot E(X_i)$$
- Sean $X_1, X_2, ..., X_n$ variables aleatorias **independientes** tal que existe la $Var(X_i)$ $\forall i = 1, 2, ...n$, entonces se verifica que:
$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} X_i)\right) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$$
o bien, $\forall a_i \in \mathbb{R}$
$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot Var(X_i)$$

6 La propiedad de Reproductividad/Aditividad para algunos modelos de distribuciones

Nos planteamos el caso de que si conocemos la distribución de probabilidad de las variables $X_1, X_2, \cdots, X_k$, podemos conocer la distribución de probabilidad de la suma, esto es, de $Y = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i$.

<u>Teorema de la Aditividad de la distribución Binomial</u>

Sean $X_1, X_2, \cdots, X_k$ variables aleatorias **independientes** tales que $X_i \sim B(n_i, p)$, $\forall i = 1, 2, \cdots, k$.

$\Longrightarrow$

$$\boxed{Y = \sum_{i=1}^{k} X_i \sim B(\sum_{i=1}^{k} n_i, p)}$$

Observar que la probabilidad de éxito debe de ser la misma para todas las variables aleatorias.

<u>Teorema de la Aditividad de la distribución Poisson</u>

Sean $X_1, X_2, \cdots, X_k$ variables aleatorias **independientes** tales que $X_i \sim P_o(\lambda_i)$, $\forall i = 1, 2, \cdots, k$.

$\Longrightarrow$

$$\boxed{Y = \sum_{i=1}^{k} X_i \sim P_o(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i)}$$

<u>Teorema de la Aditividad de la distribución Normal</u>

Sean $X_1, X_2, \cdots, X_k$ variables aleatorias **independientes** tales que cada $X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i)$, $\forall i = 1, 2, \cdots, k$.

$\Longrightarrow$ La v.a. $Y = \sum\limits_{i=1}^{k} X_i$ sigue una distribución **normal** de media

$$E(Y) = \sum_{i=1}^{k} \mu_i$$

y de varianza

$$Var(Y) = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2, \text{ de donde, } \sigma_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2},$$

Esto es,

$$\boxed{Y = \sum_{i=1}^{k} X_i \sim N\left(\mu_Y = \sum_{i=1}^{k} \mu_i, \sigma_Y = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \sigma_i^2}\right)}$$