Tema 7: Introducción a los Contrastes de Hipótesis

Introducción

Sea X la variable aleatoria poblacional con distribución de probabilidad $f_\theta(x)$, donde

$\theta \in \Theta$ es el parámetro poblacional desconocido

$\Downarrow$

Problemas Inferenciales sobre θ

$\Downarrow$ $\Downarrow$

Problemas de Estimación
(puntual o por intervalos de confianza) Tema 6

Problemas de Contrastes o Test de Hipótesis
Implica establecer una hipótesis o conjetura sobre el valor del parámetro y la contrastaremos a los datos muestrales para ver si éstos la apoya o la desmiente.

`Ejemplo 1:` Podemos suponer que las bombillas que fabrica una determinada empresa sigue una distribución normal cuya media es mayor a 1800 horas y de varianza 30 horas, y pretendemos realizar alguna investigación para saber si esta hipótesis sobre la media de la población normal ($\mu >$1800 horas) es verdadera o falsa, es decir, podemos tomar la decisión de aceptar o rechazar dicha hipótesis estadística.

`Ejemplo 2:` Un investigador agrónomo puede proponer que con un nuevo fertilizante se obtiene un rendimiento mayor. Para probar su teoría, prepara una serie de parcelas idénticas y las divide aleatoriamente en dos grupos. se aplica el fertilizante tradicional en uno de los grupos de parcelas y el nuevo fertilizante en el segundo de los grupos. Posteriormente, el investigador debe decidir, basándose en los datos sobre el rendimiento en uno y otro grupo, si el nuevo fertilizante es más eficaz que el tradicional.

En muchos aspectos, el procedimiento de las pruebas de hipótesis es similar al método científico. Las etapas fundamentales en todo contraste de hipótesis son las siguientes:

1. Se formula una suposición/hipótesis sobre la población de referencia.

2. Se selecciona una muestra de dicha población.

3. Se comprueba si los datos están o no en concordancia con la teoría planteada, es decir, se compara la observación con la teoría:

   (a) Si lo observado es incompatible con la hipótesis planteada, entonces se rechaza la hipótesis planteada.

   (b) Si, por el contrario, lo observado es compatible con lo teórico entonces NO podemos rechazar la hipótesis planteada y asumiremos que ésta es cierta.

Las pruebas de hipótesis se realizan en todos los ámbitos en los que pueden contrastarse la teoría con la observación.

Nosotros nos ocuparemos de los contrastes de hipótesis encaminados a la obtención o estudio de los distintos parámetros poblacionales.

1 Elementos de una Prueba de Hipótesis

- **Hipótesis estadística**: Afirmación que se hace sobre el valor del parámetro poblacional. La formulación de la hipótesis que se quiere contrastar implica establecer dos hipótesis mutuamente excluyentes que se denominan:
  - **Hipótesis nula=$\mathbf{H}_0$** (Se asume cierta si no se es capaz de demostrar su falsedad)
  - **Hipótesis alternativa=$\mathbf{H}_1$** (Hipótesis complementaria a $\mathbf{H}_0$)

- Primeramente, la **terminología de aceptar y rechazar una hipótesis estadística** debe quedar clara:
  - **Rechazar la hipótesis** significa concluir que ésta es falsa en virtud de la información obtenida a partir de una muestra.
  - **Aceptar la hipótesis** significa que NO se tiene suficiente información para rechazarla y, por lo tanto, se acepta.

  Aunque se habla de probar la hipótesis nula, hay que tener presente que el **OBJETIVO del estudio es:**

  Demostrar el fundamento de la hipótesis alternativa

  si tal fundamento se justifica.

- **Regla de decisión:**
  - Se seleciona una m.a.s. de la v.a. poblacional, $X_1, X_2, ..., X_n$, y se define el **Estadístico del contraste,** $U = U(X_1, X_2, ..., X_n)$, basado generalmente en el estimador puntual asociado al parámetro al que se refiera el contraste.
  - Definiremos una **Zona Crítica o de Rechazo**$\equiv R$: formada por todos aquellos valores del estadístico de contraste que por ser excesivamente grandes o pequeños resultan poco probable que ocurran cuando H_0 es verdadera.
  - Calcularemos el valor concreto que toma el estadístico para la realización muestral que tengamos, $U(x_1, x_2, ..., x_n) = u_0$, $\Longrightarrow$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} u_0 \in R \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{Rechazaré } H_0 \text{ y diremos que} \\ \text{los datos apoyan la hipótesis alternativa.}\end{array}\right. \\ \\ u_0 \notin R \Rightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Aceptaré } H_0 \text{ y diremos que los datos} \\ \\ \text{no presentan argumento en contra de } H_0.\end{array}\right.\end{array}\right.}$$

- **Tipos de errores**: Sin embargo, tanto en el caso de aceptar como de rechazar H_0 podemos estar sujetos a equivocarnos, es decir a rechazar una hipótesis siendo verdadera o bien aceptarla siendo falsa. Como se muestra en la siguiente tabla, existen cuatro posibles conclusiones:

		H_0 **VERDADERA**	H_0 **FALSA**
Decisión	**ACEPTA** H_0	Decisión CORRECTA	**ERROR TIPO II**
	RECHAZAR H_0	**ERROR TIPO I**	Decisión CORRECTA

Cada uno de estos dos errores tiene asociada una probabilidad que se denota por:

$$\boxed{\alpha = P(\textbf{ERROR TIPO I}) = P(\text{Rechazar } H_0 \ / \ H_0 \text{ Cierta})}$$

se le llama **nivel de significación del test** y se identifica con el área de la región de rechazo, ya que mide, en cierta manera, el peso de la evidencia a favor del rechazo de la hipótesis nula.

$$\boxed{\beta = P(\textbf{ERROR TIPO II}) = P(\text{Aceptar } H_0 \ / \ H_0 \text{ Falsa})}$$

De donde,

$$\boxed{1 - \alpha = P(\text{Aceptar } H_0 \ / \ H_0 \text{ Cierta})}$$

se le llama **nivel de confianza del test**, y

$$\boxed{1 - \beta = P(\text{Rechazar } H_0 \ / \ H_0 \text{ Falsa})}$$

se le llama **Potencia de la prueba** ya que representa la probabilidad de rechazar de manera correcta una hipótesis que es falsa.

El test óptimo sería aquel en el que $\alpha = \beta = 0$. Pero para un tamaño muestral fijo, cuando disminuye la probabilidad de cometer uno de los dos errores aumenta la probabilidad de cometer el otro tipo de error. El tratamiento de ambos errores no es el mismo, es decir, un error tiene más importancia que el otro.

El `ejemplo` típico es el de un juicio, donde

$$H_0 \equiv \text{“el acusado es inocente”}$$

$$H_1 \equiv \text{“el acusado es culpable”}$$

por lo que,

error tipo I $\equiv$ “CONDENAR al acusado siendo INOCENTE”

error tipo II $\equiv$ “ABSOLVER al acusado siendo CULPABLE”

Como es más grave cometer un error tipo I que un error tipo II, el criterio que se sigue es fijar una cota para la probabilidad de error tipo I antes de efectuar el test y elegir, de entre todos los test que verifican esta condición, aquel que minimice la probabilidad de error tipo II (**Test uniformemente más potente** a nivel de significación α). Como información, es preciso destacar que no siempre existe este tipo de contraste.

2 Procedimiento para realizar un Contraste de Hipótesis

1. Formulamos la hipótesis nula y la alternativa:

$$\begin{cases} H_0 : \\ \\ H_1 : \end{cases}$$

Los contrastes pueden ser de dos tipos dependiendo cómo establezcamos las hipótesis. Por ejemplo, para las pruebas paramétricas sobre el valor del parámetro θ podemos establecer:

- **Contraste BILATERAL:** Cuando las hipótesis se establecen como sigue

$$\begin{cases} H_{0:} & \theta = \theta_0 \\ H_{1:} & \theta \neq \theta_0 \end{cases}$$

- **Contraste UNILATERAL:** Cuando las hipótesis se establecen como sigue

$$\begin{cases} H_{0:} & \theta = \theta_0 \\ H_{1:} & \theta > \theta_0 \end{cases}$$

- **Contraste UNILATERAL:** Cuando las hipótesis se establecen como sigue

$$\begin{cases} H_{0:} & \theta = \theta_0 \\ H_{1:} & \theta < \theta_0 \end{cases}$$

donde θ_0 es un valor prefijado con el que queremos comparar θ.

2. Fijamos α (probabilidad del error tipo I). Es frecuente fijar

$$\alpha = 0.1,\ 0.05,\ 0.01 \Rightarrow 90\%,\ 95\% \text{ o } 99\%, \text{ respectivamente, de confianza}$$

3. Definimos el estadístico de contraste $U = U(X_1, X_2, ..., X_n)$ basándonos en el estimador puntual asociado al parámetro al que se refiera el contraste cuya distribución de probabilidad es conocida bajo la hipótesis de que H_0 es verdadera.

4. Definiremos una **Zona Crítica o de Rechazo**$\equiv R$ utilizando la distribución de probabilidad de $U(X_1, X_2, ..., X_n)$ y α, es decir,

$$\alpha = P(U(X_1, X_2, ..., X_n) \in R \ / \ H_0 \text{ es cierta})$$

5. Calcularemos el valor concreto que toma el estadístico para la realización muestral que tengamos, $U(x_1, x_2, ..., x_n) = u_0$, $\Longrightarrow$

$$u_0 \in R \Rightarrow \begin{cases} \text{Rechazaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza} \\ \\ \text{y diremos que los datos apoyan la } H_1. \end{cases}$$

$$u_0 \notin R \Rightarrow \begin{cases} \text{Aceptaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza} \\ \\ \text{y diremos que los datos no presentan argumento en contra de } H_0. \end{cases}$$

3 El $p - valor$ o nivel crítico de la prueba

A pesar de que se recomiendan valores pequeños para α, la selección del valor de α para aplicarlo a un análisis es algo arbitrario. Además, es claro que, el resultado final del test depende a qué nivel de significación se trabaje. Esto es, con una misma muestra, podemos rechazar H_0 con $\alpha = 0.05$ y no rechazarla con $\alpha = 0.04$. Para evitar esta dificultad, en la práctica se ha adoptado, el enfoque del $p - valor$ (valor que siempre recogen los paquetes estadísticos cuando se realiza un contraste). Intuitivamente, el $p - valor$ nos mide el peso de la evidencia a favor de rechazar H_0.

`Definición 1:` Se define el $p - valor$ de un test al nivel de significación más pequeño que nos lleva a rechazar H_0.

`Definición 2:` Se define el $p - valor$ de un test como la probabilidad de la región de rechazo que determina el valor del estadístico del contraste.

Generalmente:

Un $p - valor$ grande ($p - valor > 0.2$) $\Rightarrow$	**Aceptamos** H_0
Un $p - valor$ pequeño ($p - valor < 0.1$) $\Rightarrow$	**Rechazamos** H_0 aunque el **estándar es un** $p - valor < 0.05$
Para valores intermedios ($0.1 < p - valor < 0.2$) $\Rightarrow$	**Caso dudoso** (aumentar el tamaño de la muestra y repetir el test)

- Para las pruebas paramétricas planteadas anteriormente, el $p - valor$ se calcula como sigue:

$$p - valor = \begin{cases} 2P(U_0 > \mid u_0 \mid), & \text{para una prueba de dos colas: } \begin{cases} H_{0:} & \theta = \theta_0 \\ H_{1:} & \theta \neq \theta_0 \end{cases} \\ \\ P(U_0 > u_0), & \text{para una prueba de cola superior: } \begin{cases} H_{0:} & \theta = \theta_0 \\ H_{1:} & \theta > \theta_0 \end{cases} \\ \\ P(U_0 < u_0), & \text{para una prueba de cola inferior: } \begin{cases} H_{0:} & \theta = \theta_0 \\ H_{1:} & \theta < \theta_0 \end{cases} \end{cases}$$

donde U_0 es el estadístico del contraste y u_0 es el valor que toma dicho estadístico para la muestra que tengamos.

Una vez que el $p - valor$ se ha determinado, la conclusión para cualquier nivel de significación α prefijado resulta de comparar el $p - valor$ con α:

Si el $p - valor \leq \alpha \;\Rightarrow$ **Rechazamos** H_0 al nivel α.

Si el $p - valor > \alpha \Rightarrow$ **Aceptamos** H_0 al nivel α.

4 Contraste de hipótesis para la media μ de una población normal, $X \sim N(\mu, \sigma)$, con $\underline{\sigma^2}$ conocida

(a) Contraste BILATERAL
$$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

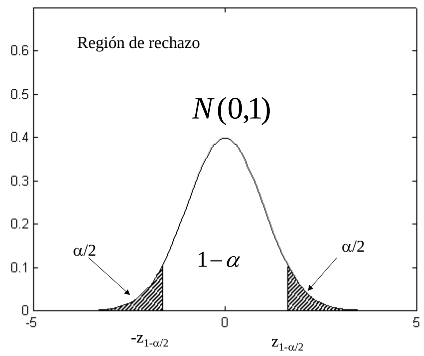
(b) Cont. UNILATERAL
$$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu > \mu_0 \end{cases}$$

(c) Cont. UNILATERAL
$$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu < \mu_0 \end{cases}$$

donde μ_0 es un valor prefijado con el que queremos comparar μ.

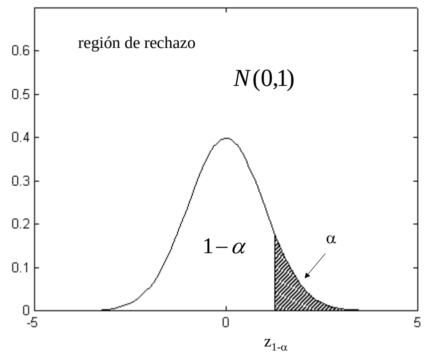
- Fijamos α
- Estadístico del contraste: $\boxed{Z_0 = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)}$ bajo H_0
- Determinamos, en la distribución $N(0,1)$, la **región de rechazo**$\equiv R$:

(a)



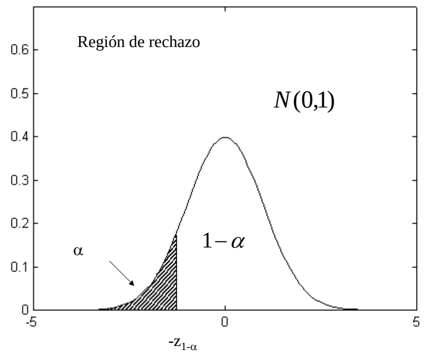
$$R = \{z \;/\; z > z_{1-\alpha/2}, \text{ o bien}, \; z < -z_{1-\alpha/2}\}$$

(b)



$$R = \{z \;/\; z > z_{1-\alpha}\}$$

(c)



$$R = \{z \;/\; z < -z_{1-\alpha}\}$$

- Calculamos el valor del estadístico para la muestra que tengamos $Z_0(x_1, x_2, ..., x_n) = z_0$, entonces si

$$z_0 \in R \Rightarrow \{ \text{ Rechazaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

$$z_0 \notin R \Rightarrow \{ \text{ Aceptaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

- Para esta prueba (PRUEBAS SOBRE LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL CON VARIANZA CONOCIDA), el $p - valor$ se calcula como sigue:

$$
p - valor = \begin{cases} 2P(Z_0 >\mid z_0 \mid), & \text{para una prueba de dos colas: } \begin{cases} H_{0:} & \mu = \mu_0 \\ H_{1:} & \mu \neq \mu_0 \end{cases} \\ P(Z_0 > z_0), & \text{para una prueba de cola superior: } \begin{cases} H_{0:} & \mu = \mu_0 \\ H_{1:} & \mu > \mu_0 \end{cases} \\ P(Z_0 < z_0), & \text{para una prueba de cola inferior: } \begin{cases} H_{0:} & \mu = \mu_0 \\ H_{1:} & \mu < \mu_0 \end{cases} \end{cases}
$$

  donde Z_0 es el estadístico del contraste y z_0 es el valor que toma dicho estadístico para la muestra que tengamos.

Nota: Cuando la v.a. poblacional X no sea necesariamente normal con $E(X) = \mu$ y $Var(X) = \sigma^2$ (conocida), el contraste de hipótesis para la media poblacional obtenido sigue siendo válido para muestras grandes vía el Teorema Central del Límite, ya que de esta manera podemos asegurar que la variable aleatoria

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

se distribuye *aproximadamente* según una $N(0, 1)$ cuando n es grande.

5 Contraste de hipótesis para la media μ de una población normal, $X \sim N(\mu, \sigma)$, con $\underline{\sigma^2 \text{ desconocida}}$

(a) <u>Contraste BILATERAL</u>
$$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

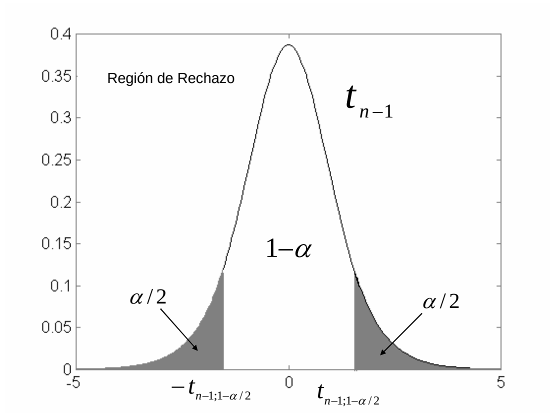
(b) <u>Cont. UNILATERAL</u>
$$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu > \mu_0 \end{cases}$$

(c) <u>Cont. UNILATERAL</u>
$$\begin{cases} H_0: & \mu = \mu_0 \\ H_1: & \mu < \mu_0 \end{cases}$$

donde μ_0 es un valor prefijado con el que queremos comparar μ.

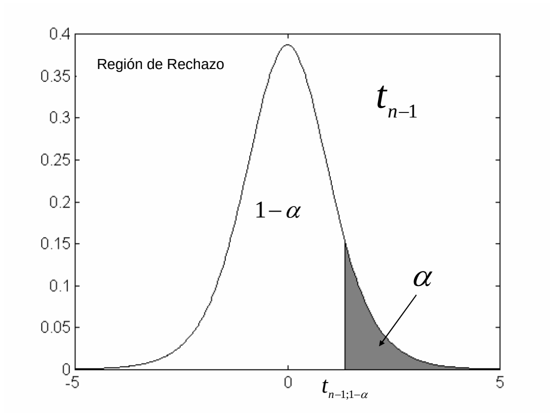
- Fijamos α
- Estadístico del contraste: $\boxed{T_0 = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}}$ bajo H_0
- Determinamos, en la distribución t_{n-1}, la **región de rechazo**$\equiv R$:

(a)



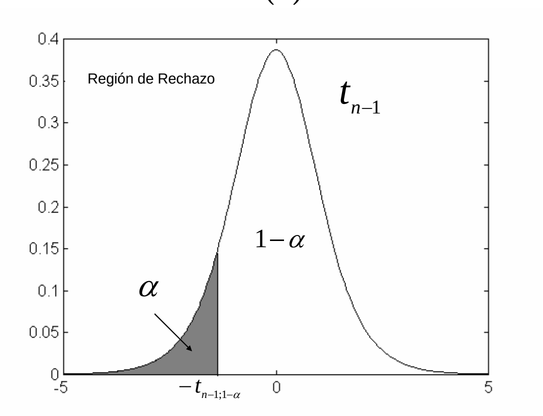
$$R = \{t \;/\; t > t_{n-1;1-\alpha/2} \text{ o bien } t < -t_{n-1;1-\alpha/2}\}$$

(b)



$$R = \{t \;/\; t > t_{n-1;1-\alpha}\}$$

(c)



$$R = \{t \;/\; t < -t_{n-1;1-\alpha}\}$$

- Calculamos el valor del estadístico para la muestra que tengamos $T_0(x_1, x_2, ..., x_n) = t_0$, entonces si

$$t_0 \;\in\; R \Rightarrow \{\text{ Rechazaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

$$t_0 \;\notin\; R \Rightarrow \{\text{ Aceptaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

- Para esta prueba (PRUEBAS SOBRE LA MEDIA DE UNA DISTRIBUCIÓN NORMAL CON VARIANZA DESCONOCIDA), el $p - valor$ se calcula como sigue:

$$
p - valor = \begin{cases} 2P(T_0 > \mid t_0 \mid), & \text{para una prueba de dos colas: } \begin{cases} H_{0:} & \mu = \mu_0 \\ H_{1:} & \mu \neq \mu_0 \end{cases} \\ \\ P(T_0 > t_0), & \text{para una prueba de cola superior: } \begin{cases} H_{0:} & \mu = \mu_0 \\ H_{1:} & \mu > \mu_0 \end{cases} \\ \\ P(T_0 < t_0), & \text{para una prueba de cola inferior: } \begin{cases} H_{0:} & \mu = \mu_0 \\ H_{1:} & \mu < \mu_0 \end{cases} \end{cases}
$$

donde T_0 es el estadístico del contraste y t_0 es el valor que toma dicho estadístico para la muestra que tengamos.

Nota: Cuando la v.a. poblacional X no sea necesariamente normal con $E(X) = \mu$ y $Var(X) = \sigma^2$ (desconocida), el contraste de hipótesis para la media poblacional obtenido sigue siendo válido para muestras grandes, ya que de esta manera podemos asegurar que la v.a.

$$
Z = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}}
$$

sigue *aproximadamente* una distribución normal estándar.

6 Contrastes de Diferencia de Medias Poblacionales de dos poblaciones normales independientes

Supongamos que tenemos dos poblaciones **independientes** X_1 y X_2 con distribución:

$$X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1) \quad \text{y} \quad X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2)$$

- Nos podemos plantear los contrastes:

(a) <u>Contraste BILATERAL</u>
$$\begin{cases} H_{0:} & \mu_1 = \mu_2 \\ H_{1:} & \mu_1 \neq \mu_2 \end{cases}$$

(b) <u>Cont. UNILATERAL</u>
$$\begin{cases} H_{0:} & \mu_1 = \mu_2 \\ H_{1:} & \mu_1 > \mu_2 \end{cases}$$

(c) <u>Cont. UNILATERAL</u>
$$\begin{cases} H_{0:} & \mu_1 = \mu_2 \\ H_{1:} & \mu_1 < \mu_2 \end{cases}$$

- Fijamos α
- Tomamos el estadístico del contraste bajo H_0:
  - **Caso de que las varianzas σ_1^2 y σ_2^2 sean conocidas:**

$$\boxed{Z_0 = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2})}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} \sim N(0,1)}$$

  - **Caso de que las varianzas σ_1^2 y σ_2^2 sean desconocidas no iguales:**

$$\boxed{T_0 = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2})}{\sqrt{\dfrac{S_1^2}{n_1} + \dfrac{S_2^2}{n_2}}} \approx t_k \quad \text{con } k = min\{n_1 - 1, n_2 - 1\}}$$

  - **Caso de que las varianzas σ_1^2 y σ_2^2 sean desconocidas pero iguales, $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$:**

$$\boxed{T_0 = \frac{(\overline{X_1} - \overline{X_2})}{S_p\sqrt{\dfrac{1}{n_1} + \dfrac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2} \qquad \text{donde} \qquad S_p^2 = \frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

- Determinamos la región de rechazo$\equiv$ R de la forma habitual, utilizando la distribución de probabilidad del estadístico del contraste y α.
- Calculamos el valor del estadístico para la muestra que tengamos, entonces si

$$\in \quad R \Rightarrow \{ \text{ Rechazaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

$$\notin \quad R \Rightarrow \{ \text{ Aceptaré } H_0 \text{ al } 100(1-\alpha)\% \text{ de confianza}$$

- Para estas pruebas, el $p - valor$ se calcula de la forma habitual.