Asignatura: MATEMÁTICAS e INFORMÁTICA
Grado en Ingeniería de la Hortofruticultura y Jardinería
Grado en Ingeniería de las Industrias Agroalimentarias
1er Parcial. Curso 2012/2013
(15/02/2013)
ENUNCIADO Y RESUELTO

1. $\left[2\ \textit{puntos}\right]$ **Discutir y resolver, cuando sea posible, el sistema**

$$\left\{\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (\mathbf{a}^2 - 14)z &= \mathbf{a} + 2 \end{aligned}\right.$$

en función del parámetro a $\in \mathbb{R}$.

SOLUCIÓN:
La matriz del sistema tendrá rango 3 cuando su determinante sea no nulo. Por ello, y como

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & \mathbf{a}^2 - 14 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 112 - 7a^2 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 4$$

tendremos que cuando $a \neq \pm 4$, el sistema será compatible determinado. Veamos que ocurre cuando $a = \pm 4$:

- Si $a = 4$: Tenemos en este caso

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(donde hemos aplicado Gauss), por lo que $rango(A) = rango(AM) = 2$, y el sistema será compatible indeterminado.

- Si $a = -4$: Tenemos en este caso

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & -2 \end{array}\right) \sim \ldots \sim \left(\begin{array}{ccc:c} 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & -7 & 14 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 56 \end{array}\right)$$

por lo que $rango(A) = 2$ y $rango(AM) = 3$, y el sistema será incompatible.

Pasamos ahora a resolver el sistema en los casos en los que es compatible determinado ($a \neq \pm 4$) y compatible indeterminado ($a = 4$):

- Si $a \neq \pm 4$: Se obtiene como solución

$$z = \frac{7a^2 - 112}{7a - 28},\ y = \text{—},\ x = \text{—}$$

- Si $a = 4$: Se obtiene como solución

$$y = \frac{14z + 10}{7},\ x = \text{—}$$

---

2. $\left[2,5\ puntos\right]$ **Sea** $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ **una aplicación lineal que verifica:**

$$f(0,0,-1) = (10,-5,-3) \ \ \textbf{y} \ \ f\left(\vec{\mathbf{s}}\right) = 3\vec{\mathbf{s}}$$

para todo $\vec{s}$ **de** S, **siendo**

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\}$$

Calcular:

2.a **La matriz de** f **respecto de las bases canónicas.** $\left[1\ p.\right]$

2.b **La dimensión y las ecuaciones del núcleo y de la imagen de** f **y estudiar la inyectividad y suprayectividad de la aplicación.** $\left[0,5\ p.\right]$

2.c **La matriz de** f **respecto de las bases canónica en el conjunto inicial y** B' **en el final, siendo**

$$B' = \{(1,-2,1),(0,2,-3),(1,0,2)\}$$

$\left[1\ p.\right]$

Solución:

(2.a) Representaremos por A a la matriz buscada, que inicialmente supondremos que viene dada por

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

y vamos a calcular todos estos coeficientes usando las condiciones que sabemos que verifica f :

- Como $f(0,0,-1) = (10,-5,-3)$, esto significa que

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

de donde $c_1 = -10$, $c_2 = 5$ y $c_3 = 3$.

- Como sabemos como son las imágenes de los vectores de S (nos dice el enunciado que $f\left(\vec{\mathbf{s}}\right) = 3\vec{\mathbf{s}}$), y se tiene que

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\} = \{(x,y,-x-y)\} =< (1,0,-1),(0,1,-1) >$$

tendremos que $f(1,0,-1) = 3(1,0,-1)$ y $f(0,1,-1) = 3(0,1,-1)$, o lo que es lo mismo

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -10 \\ a_2 & b_2 & 5 \\ a_3 & b_3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \ \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & -10 \\ a_2 & b_2 & 5 \\ a_3 & b_3 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

de donde $a_1 = -7$, $a_2 = 5$ y $a_3 = 0$; y $b_1 = -10$, $b_2 = 8$ y $b_3 = 0$

Por tanto,

$$A = \begin{pmatrix} -7 & -10 & -10 \\ 5 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(2.b) Sabemos que

$$\mathrm{Im}(f) =< (-7,5,0), (-10,8,0), (-10,5,3) >$$

y como estos vectores son linealmente independientes (el determinante de su matriz es claramente no nulo), será $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3$, por lo que *f* será suprayectiva. Además se tendrá que verificar entonces que $\dim \ker(f) = 0$, por lo que sin calcularlo sabemos que *f* es inyectiva y que $\ker(f) = \{(0,0,0)\}$.

(2.c) Aplicamos el esquema tradicional

$$\underset{C}{\mathbb{R}^3} \xrightarrow{f} \underset{C}{\mathbb{R}^3} \rightarrow \underset{B'}{\mathbb{R}^3}$$

Por tanto se tiene

$$M_{C,B'}(f) = M_{C,B'} \times M_C(f)$$

es decir

$$M_{C,B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -7 & -10 & -10 \\ 5 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} -\frac{43}{8} & -8 & -\frac{61}{8} \\ -\frac{23}{8} & -4 & -\frac{41}{8} \\ -\frac{13}{8} & -2 & -\frac{19}{8} \end{pmatrix}$$

_ _

3. $\left[3\ puntos\right]$ **En $\mathbb{R}^3$ se consideran los subespacios definidos por**

$$\begin{aligned} S &=< (1,0,1), (0,1,0) > \\ T &=< (0,0,1) > \\ U &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x + 2y - 3z = 0\right\} \\ V &= \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x - 2y = 0,\ y + 3z = 0\right\} \end{aligned}$$

Se pide:

3.a **Obtener bases para los subespacios** $S + T$ y $S \cap T$**. ¿Es directa la suma de** S **y** T**?** $\left[0,5\ p.\right]$

3.b **Hallar una base ortonormal para** U **y para** V. $\left[1\ p.\right]$

3.c **Obtener los subespacios** $U^\perp$ **y** $V^\perp$. $\left[0,5\ p.\right]$

3.d **Determinar la proyección ortogonal del vector** $(1,-1,1)$ **sobre** U y sobre $U^\perp$. $\left[1\ p.\right]$

SOLUCIÓN:

(3.a) $S + T$ está generado por todos los vectores de S y T, y puesto que

$$\{(1,0,1), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

son linealmente independientes, estos 3 vectores forman una base de $S + T$. Por tanto, tendremos que $S + T$ tiene dimensión 3, es decir $S + T = \mathbb{R}^3$. Al mismo tiempo tambien sabemos que $S \cap T = \{(0,0,0)\}$, por lo que la suma será directa.

(3.b) Tenemos que

$$U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x + 2y - 3z = 0\right\} = \{(-2y+3z,y,z)\} =< (-2,1,0),(3,0,1) >$$

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x - 2y = 0,\ y + 3z = 0\right\} = \{(-6z,-3z,z)\} =< (-6,-3,1) >$$

- Obtendremos una base ortonormal para U, aplicando el método de G-S: Como

$$u_1 = e_1 = (-2,1,0)$$

$$u_2 = e_2 - \frac{u_1 \bullet e_2}{u_1 \bullet u_1} u_1 = (3,0,1) - \frac{(-2,1,0)\bullet(3,0,1)}{(-2,1,0)\bullet(-2,1,0)}(-2,1,0) =$$

$$= (3,0,1) + \frac{6}{5}(-2,1,0) = \left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}, 1\right)$$

Por tanto, la base ortonormal para U será la dada por $\left\{\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}\right\}$, donde

$$\|u_1\| = \sqrt{u_1 \bullet u_1} = \sqrt{5}$$

$$\|u_2\| = \sqrt{u_2 \bullet u_2} = \frac{\sqrt{70}}{5}$$

- Para V, y como está generado por un solo vector, la base ortonormal será este único vector, dividido por su módulo, es decir

$$V = \frac{1}{\sqrt{46}} < (-6,-3,1) >$$

(3.c) Al ser U un plano, sabemos que

$$U^\perp =< (1,2,-3) >$$

Nota: Este mismo resultado hubiésemos encontrado si aplicamos:

$$(x,y,z) \in U^\perp \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} (x,y,z)\bullet(-2,1,0) = 0 \\ (x,y,z)\bullet(3,0,1) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} -2x + y = 0 \\ 3x + z = 0 \end{array} \right. \Rightarrow U^\perp = \{(x,2x,-3x)\}$$

Para $V^\perp$: Como V es una recta de vector director $(-6,-3,1)$, sabemos que

$$V^\perp = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ -6x - 3y + z = 0\right\}$$

Nota: Este mismo resultado hubiésemos encontrado si aplicamos:

$$(x,y,z) \in V^\perp \Rightarrow (x,y,z)\bullet(-6,-3,1) = 0 \Rightarrow -6x - 3y + z = 0$$

(3.d) Se trata de poner $(1,-1,1) = \vec{u} + \vec{v}$, donde $\vec{u} \in U$ y $\vec{v} \in U^\perp$, siendo el valor del vector $\vec{u}$ la proyección ortogonal sobre U y $\vec{v}$ la proyección ortogonal sobre $U^\perp$. Al ser $u \in U =< (-2,1,0),(3,0,1) >$ y $v \in U^\perp =< (1,2,-3) >$, se tiene

$$(1,-1,1) = \alpha(-2,1,0) + \beta(3,0,1) + \gamma(1,2,-3)$$

por lo que resolviendo este sistema se llega a

$$\alpha = -\frac{3}{7},\ \beta = \frac{1}{7},\ \gamma = -\frac{2}{7}$$

De esta forma la proyección ortogonal sobre U será

$$\vec{u} = \alpha(-2,1,0) + \beta(3,0,1) = -\frac{3}{7}(-2,1,0) + \frac{1}{7}(3,0,1) = \frac{1}{7}(9,-3,1)$$

mientras que la proyección ortogonal sobre $U^\perp$ será

$$\vec{v} = \gamma(1,2,-3) = -\frac{2}{7}(1,2,-3)$$

– –

4. $\left[2,5\ puntos\right]$ **Dada la matriz**

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{a} & \mathbf{a}-2 \end{pmatrix}$$

se pide:

4.a **Determinar para qué valores del parámetro a existe la inversa de** A**, y obtenerla cuando sea posible.** $\left[1\ p.\right]$

4.b **Para los valores de a para los que NO existe la inversa, estudiar si la matriz** A **es diagonalizable y, en caso de que lo sea, hallar la matriz diagonal** D **y la matriz de paso** P. $\left[1,5\ p.\right]$

SOLUCIÓN:

(4.a) La matriz no tendrá inversa cuando su determinante sea nulo. De

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{a} & \mathbf{a}-2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2(\mathbf{a}-2) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{a} = 2$$

Por tanto, si $\mathbf{a} = 2$ la matriz no tendrá inversa, y si $\mathbf{a} \neq 2$, si que tiene inversa. Si la calculamos en este último caso, tendremos

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & \mathbf{a} & \mathbf{a}-2 \end{pmatrix}^{-1} = \ldots = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{a}{a-2} & -\frac{a}{2a-4} & \frac{1}{a-2} \end{pmatrix}$$

(4.b) Tenemos que estudiar si la matriz A es diagonalizable, donde consideramos $\mathbf{a} = 2$, es decir, tendremos la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si obtenemos en primer lugar los valores propios de A :

$$|A - \lambda\mathbb{I}| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-1-\lambda)(2-\lambda)(-\lambda) = 0$$

cuyas soluciones (valores propios) son

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 0$$

Puesto que la matriz tiene 3 valores propios diferentes, ya sabemos que es diagonalizable.

Vamos a obtener ahora los vectores propios correspondientes:

- Asociado a $\lambda_1 = -1$: De resolver

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

resulta

$$x = -\frac{3}{2}y,\ z = -2y$$

por lo que

$$S_{\lambda_1} = \left\{\left(-\frac{3}{2}y, y, -2y\right)\right\} =< (-3, 2, -4) >$$

- Asociado a $\lambda_2 = 2$: De resolver

$$A \cdot X = 2 \cdot X$$

resulta

$$x = 0,\ y = z$$

por lo que

$$S_{\lambda_2} = \{(0, y, y)\} =< (0, 1, 1) >$$

- Asociado a $\lambda_3 = 0$: De resolver

$$A \cdot X = 0 \cdot X$$

resulta

$$x = 0,\ y = 0$$

por lo que

$$S_{\lambda_3} = \{(0, 0, z)\} =< (0, 0, 1) >$$

De esta forma, sabemos que existe una matriz P y una matriz diagonal D tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P = D$, siendo

$$P = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$