Universidad Politécnica de Cartagena
Departamento de Matemática Aplicada y Estadística
Escuela Técnica Superior de Ingeniería Agronómica
Examen de Matemáticas e Informática
Grado en Ingeniería de las Industrias Alimentarias
Grado en Ingeniería de la Hortofruticultura y Jardinería
Segundo examen parcial, 6 de Junio de 2013

Observaciones:

1) Sitúa el DNI u otro documento identificativo semejante en posición visible encima de la mesa.

2) Escribe nombre y apellidos en todas las hojas. Hazlo además con bolígrafo (o similar) azul o negro. NUNCA a lápiz.

3) La duración del examen será de 3 horas.

1. Responde a 2 de las siguientes preguntas:

   (a) Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(3x)}{x(x-2)\tan(2x)}$.

   Solución: Como sale del tipo $\frac{0}{0}$ hay que aplicar l'Hôpital y sale (el segundo miembro se obtiene al simplificar)

$$\lim_{x\to 0} \frac{3\sin(3x)}{(x-2)\tan(2x)+x\tan(2x)+x(x-2)\frac{2}{\cos^2(2x)}} = \lim_{x\to 0} \frac{3\sin(3x)}{(2x-2)\tan(2x)+2x(x-2)\cos^{-2}(2x)}$$

   que de nuevo es del tipo $\frac{0}{0}$ y se puede aplicar l'Hôpital y sale

$$\lim_{x\to 0} \frac{9\cos(3x)}{2\tan(2x)+(2x-2)\frac{2}{\cos^2(2x)}+2(x-2)\cos^{-2}(2x)+2x\cos^{-2}(2x)+x(x-2)4\sin(2x)\cos^{-3}(2x)}$$

   Al sustituir finalmente sale

$$\frac{9}{2\cdot 0-2\cdot\frac{2}{1}+2\cdot(-2)\cdot 1+2\cdot 0\cdot 1+0\cdot(-2)\cdot 4\cdot 0\cdot 1} = \frac{9}{-4} = -\frac{9}{4}$$

   (b) Obtén los extremos absolutos de la función $f(x) = x^3 - 12x$ en el intervalo $[-1, 3]$.

   Solución: Igualamos a 0 la derivada $f'(x) = 3x^2 - 12$ y vemos que se anula en $x = -2, 2$. El primer punto no vale por estar fuera del intervalo $[-1, 3]$. Ahora evaluamos la función f en los puntos candidatos: $-1, 3, 2$ y obtenemos $f(-1) = 11, f(3) = -9, f(2) = -16$ luego concluimos que en el intervalo $[-1, 3]$ el máximo de la función f es 11 y se alcanza en el punto $x = -1$ y el mínimo es -16 y se alcanza en el punto $x = 2$.

(c) Halla el polinomio de Taylor de grado 4 de la función $g(x) = \cos x$ en el punto $a = 0$.

Solución: La fórmula es $p(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \frac{f^{IV}(0)x^4}{4!}$

Las derivadas salen $f'(x) = -\sin x, f''(x) = -\cos x, f'''(x) = \sin x, f^{IV}(x) = \cos x$, luego en el punto $a = 0$ valen (éstas y sus derivadas) $f(0) = 1, f'(0) = 0, f''(0) = -1, f'''(0) = 0, f^{IV}(0) = 1$. En definitiva el polinomio vale $p(x) = 1+0\cdot x+\frac{-1\cdot x^2}{2}+\frac{0\cdot x^3}{6}+\frac{1\cdot x^4}{24} = 1+-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$

(1 punto cada una; en total 2 puntos)

2. Calcula 2 de las integrales siguientes:

(a) $\int \frac{12}{x^2-4}dx$

Solución: Hay que hallar la descomposición de la fracción $\frac{12}{x^2-4} = \frac{12}{(x-2)(x+2)}$ en suma de fracciones de la forma $\frac{12}{(x-2)(x+2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{Ax+2A+Bx-2B}{(x-2)(x+2)} = \frac{Ax+Bx+2A-2B}{(x-2)(x+2)}$ luego $12 = Ax + Bx + 2A - 2B$ y por tanto $A + B = 0$ y $2A - 2B = 12$. Es fácil concluir que $A = 3, B = -3$. Entonces $\int \frac{12}{x^2-4}dx = \int \frac{3}{x-2}dx+\int \frac{-3}{x+2}dx = 3\log|x-2|-3\log|x+2| + K$

(b) $\int \sin^4 x \cdot \cos x dx$

Solución: Es inmediata: $\int \sin^4 x \cdot \cos x dx = \frac{\sin^5 x}{5} + K$

(c) $\int_0^1 9x \cdot e^{-3x}dx$

Solución: Se resuelve por partes tomando $u = 9x, dv = e^{-3x}dx$ luego $du = 9dx, v = \int e^{-3x}dx = \frac{1}{-3}\int -3e^{-3x}dx = \frac{1}{-3}e^{-3x}$. Así tenemos que

$$\int_0^1 9x \cdot e^{-3x}dx = \left[9x \cdot \frac{1}{-3}e^{-3x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{-3}e^{-3x} \cdot 9dx =$$

$$= 9 \cdot \frac{1}{-3}e^{-3} - 0 \cdot \frac{1}{-3}e^0 - \int_0^1 -3e^{-3x}dx = -3e^{-3} - 0 - \left[e^{-3x}\right]_0^1 = -3e^{-3} - [e^{-3} - 1] = 1 - 4e^{-3}$$

(1 punto cada una; en total 2 puntos)

3. Determina las derivadas parciales de orden 1 y 2 de la siguiente función $F(x, y) = \frac{x^2}{y} - \cos(x \cdot y)$ en todo punto de su dominio. **(2 puntos)**

Solución: $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{2x}{y} + y\sin(x \cdot y)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{x^2}{y^2} + x\sin(x \cdot y)$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{2}{y} + y^2\cos(x \cdot y)$, $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = \frac{2x^2}{y^3} + x^2\cos(x \cdot y)$, $\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = \frac{-2x}{y^2} + \sin(x \cdot y) + xy\cos(x \cdot y)$

4. Obtén la matriz jacobiana de la función $G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $G(x, y, z) = (x^2+\sin y, ze^{x\cdot y})$ en todo punto posible, y en particular en el punto $(1, 0, -1)$. **(2 puntos)**

Solución: La matriz jacobiana en un punto cualquiera es

$$JG(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & \cos y & 0 \\ zye^{x\cdot y} & zxe^{x\cdot y} & e^{x\cdot y} \end{pmatrix}$$

y en el punto considerado es

$$JG(1,0,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Consideremos la siguiente función:

$$h(x,y) = 3x \cdot y - x \cdot y^2 - x^2 \cdot y$$

Haz uno de los 2 siguientes apartados:

(a) Clasifica los extremos relativos de h.

Solución: Las derivadas parciales valen

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= 3y - y^2 - 2xy = y(3 - y - 2x) \\ \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) &= 3x - 2xy - x^2 = x(3 - 2y - x) \end{aligned}$$

Al igualarlas a 0 obtenemos cuatro posibilidades:

1) $y = 0, x = 0$, nos lleva al punto $(0,0)$.

2) $y = 0, 3 - 2y - x = 0$, nos lleva al punto $(3,0)$.

3) $3 - y - 2x = 0, x = 0$, nos lleva al punto $(0,3)$.

4) $3 - y - 2x = 0, 3 - 2y - x = 0$, nos lleva al punto $(1,1)$.

Calculamos la matriz hessiana

$$Hh(x,y) = \begin{pmatrix} -2y & 3 - 2y - 2x \\ 3 - 2y - 2x & -2x \end{pmatrix}$$

en todo punto, que particularizada a nuestros 4 puntos nos dan

$$\begin{aligned} Hh(0,0) &= \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \\ Hh(3,0) &= \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & -6 \end{pmatrix} \\ Hh(0,3) &= \begin{pmatrix} -6 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \\ Hh(1,1) &= \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

por tanto

$$\Delta_1 h(0,0) = 0, \Delta_2 h(0,0) = -9, \text{ luego } h \text{ presenta en } (0,0) \text{ un punto de silla}$$

$$\Delta_1 h(3,0) = 0, \Delta_2 h(3,0) = -9, \text{ luego } h \text{ presenta en } (3,0) \text{ un punto de silla}$$

$$\Delta_1 h(0,3) = -6, \Delta_2 h(0,3) = -9, \text{ luego } h \text{ presenta en } (0,3) \text{ un punto de silla}$$

$$\Delta_1 h(1,1) = -2, \Delta_2 h(1,1) = 3, \text{ luego } h \text{ presenta en } (1,1) \text{ un máximo relativo}$$

(b) Halla la expresión de la diferencial de h en el punto $(3,-1)$. Halla además la derivada direccional en la dirección del vector $(2,1)$ de f en el punto $(3,-1)$ y también en el punto $(0,5)$.

Solución: La fórmula es $dh(3,-1)(v_1,v_2) = \frac{\partial h}{\partial x}(3,-1) \cdot v_1 + \frac{\partial h}{\partial y}(3,-1) \cdot v_2$

Las derivadas parciales valen $\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = 3y - y^2 - 2xy$, $\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = 3x - 2xy - x^2$, luego en el punto en cuestión $\frac{\partial h}{\partial x}(3,-1) = 2$, $\frac{\partial h}{\partial y}(3,-1) = 6$. Luego la expresión de la diferencial de h en el punto $(3,-1)$ es $dh(3,-1)(v_1,v_2) = 2v_1 + 6v_2$. La primera derivada direccional vale $D_{(2,1)}h(3,-1) = dh(3,-1)(2,1) = 2 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 10$ y la segunda $D_{(2,1)}h(0,5) = dh(0,5)(2,1) = \frac{\partial h}{\partial x}(0,5) \cdot 2 + \frac{\partial h}{\partial y}(0,5) \cdot 1 = -10 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = -20$ (hemos calculado las derivadas parciales en el punto $(0,5)$ pues eran necesarias: $\frac{\partial h}{\partial x}(0,5) = -10$, $\frac{\partial h}{\partial y}(0,5) = 0$).

(2 puntos el apartado que elijas)