Apuntes de Matemáticas

Cálculo I

Ingeniería agrónoma grado en hortofruticultura y jardinería

3ª Edición

Jorge Cerezo Martínez

Índice

1. Repaso de derivación

❖ Reglas básicas de la derivación

- $(f \mp g)' = f' \mp g'$
- $(k \cdot f)' = k \cdot f'$
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

❖ Tabla de derivadas: función simple y compuesta (Regla de la cadena)

1. $y = k \rightarrow y' = 0$
2. $y = x^n \rightarrow y' = n(x)^{n-1}$

   $y = f^n \rightarrow y' = n(f)^{n-1} \cdot f'$
3. $y = \sqrt[n]{x} = (x)^{\frac{1}{n}} \rightarrow y' = 1/n\,(x)^{\frac{1}{n}-1}$

   $y = \sqrt[n]{f} = (f)^{\frac{1}{n}} \rightarrow y' =$

   $= 1/n\,(f)^{\frac{1}{n}-1} \cdot f'$

   $* \forall n > 2$
4. $y = e^x \rightarrow y' = e^x$

   $y = e^f \rightarrow y' = e^f \cdot f'$
5. $y = a^x \rightarrow y' = a^x \cdot \ln a$

   $y = a^f \rightarrow y' = a^f \cdot \ln a \cdot f'$
6. $y = \ln x \rightarrow y' = \frac{1}{x}$

   $y = \ln f \rightarrow y' = \frac{f'}{f}$
7. $y = \log_a x \rightarrow y' = \frac{1}{x \ln a}$

   $y = \log_a f \rightarrow y' = \frac{f'}{f \ln a}$

- Trigonométricas

8. $y = \sin x \rightarrow y' = \cos x$

   $y = \sin f \rightarrow y' = \cos f \cdot f'$
9. $y = \cos x \rightarrow y' = -\sin x$

   $y = \cos f \rightarrow y' = -\sin f \cdot f'$
10. $y = \tan x \rightarrow y' = 1 + \tan^2 x = \sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$y = \tan f \rightarrow y' = (1 + \tan^2 f) \cdot f'$

$= \sec^2 f \cdot f' = \frac{f'}{\cos^2 f}$

11. $y = \text{arcsen} x \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

    $y = \text{arcsen} f \rightarrow y' = \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$
12. $y = \arccos x \rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

    $y = \arccos f \rightarrow y' = \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}}$
13. $y = \text{arctg} x \rightarrow y' = \frac{1}{1+x^2}$

    $y = \text{arctg} f \rightarrow y' = \frac{f'}{1+f^2}$
14. $y = \sec x \rightarrow y' = \sec x \tan x$

    $y = \sec f \rightarrow y' = f' \cdot \sec f \tan f$
15. $y = \csc x \rightarrow y' = -\csc x \cdot \tan x$

    $y = \csc f \rightarrow y' = -f' \cdot \csc f \cdot \tan f$

1.1. Ejemplos de derivación con regla de la cadena

2.1. $f(x) = (1+3x^4)^5$

$$f'(x) = 5(1+3x^4)^4 \cdot (12x^3) \rightarrow 60x^3(1+3x^4)^4$$

2.2. $f(x) = (1+x+x^2)^3$

$$f'(x) = 3(1+x+x^2)^2 \cdot (1+2x)$$

2.3. $f(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{2}{(x-1)^2} \frac{3}{(x-1)^3}$

$$f'(x) = -1(x-1)^{-2} - 4(x-2)^{-3} - 9(x-1)^{-4} \rightarrow \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{4}{(x-2)^3} - \frac{9}{(x-1)^4}$$

3.1.$f(x) = \sqrt{1-x^2} \rightarrow (1-x^2)^{1/2}$

$$f'(x) = {}^{1}\!/_{2}\,(1-x^2)^{-1/2} \cdot 2x \rightarrow \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} \rightarrow \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

3.2. $f(x) = \sqrt[3]{2+5x^2} \rightarrow f(x) = (2+5x^2)^{1/3}$

$$f'(x) = {}^{1}\!/_{3}\,(2+5x^2)^{-2/3} \cdot (10x) \rightarrow \frac{10x}{3\sqrt[3]{(2+5x^2)^2}}$$

3.3. $f(x) = \frac{7}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}} \rightarrow f(x) = 7(x^3-1)^{-2/3}$

$$f'(x) = {}^{-14}\!/_{3}\,(x^3-1)^{-5/3} \cdot (3x^2) \rightarrow f'(x) = \frac{-14x^2}{(x^3-1)\sqrt[3]{(x^3-1)^2}}$$

4.1. $f(x) = \left(1+e^{\sin x}\right)^3$

$$f'(x) = 3\left(1+e^{\sin x}\right)^2 \cdot e^{\sin x} \cdot \cos x \rightarrow 3\cos x\left(e^{\sin x} + e^{\sin^2 x}\right)$$

4.2. $f(x) = e^{\sqrt{x^2+1}} \rightarrow f(x)e^{(x^2+1)^{1/2}}$

$$f'(x) = e^{(x^2+1)^{1/2}} \cdot {}^{1}\!/_{2}\,(x^2+1)^{-1/2} \cdot 2x \rightarrow \frac{e^{\sqrt{x^2+1}}x}{\sqrt{x^2+1}}$$

4.3. $f(x) = x^2 \cdot e^{1/x}$

$$f'(x) = 2xe^{1/x} + x^2e^{1/x} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow f'(x) = 2xe^{1/x} + e^{1/x} = e^{1/x}(2x+1)$$

5.1 $f(x) = \frac{1}{3x^2} \cdot 3^{x^3} \rightarrow f(x) = \frac{1}{3}(x)^{-2} \cdot 3^{x^3}$

$$f'(x) = \frac{-2}{3x^3} \cdot 3^{x^3} + \frac{1}{3x^2} \cdot 3^{x^3} \cdot \ln|3| \cdot 3x^2 \rightarrow f'(x) = 3^{x^3}\left(\frac{-2}{3x^3} + \ln|3|\right)$$

5.2. $f(x) = 4^{\cos^2 x}$

$$f'(x) = 4^{\cos^2 x} \cdot \ln|4| \cdot 2\cos x \sin x \rightarrow f'(x) = 4^{\cos^2 x} \cdot \ln|4| \cdot \sin 2x$$

5.3. $f(x) = x7^{\ln x}$

$$f'(x) = 1 \cdot 7^{\ln x} + x \cdot 7^{\ln x} \cdot \ln|7| \cdot \frac{1}{x} \rightarrow f'(x) = 7^{\ln x}(1+\ln|7|)$$

6.1. $f(x) = \ln(\ln x) \rightarrow f(x) = \ln\left(\overbrace{\ln x}^{t}\right)$

$$f'(x) = \frac{t'}{t} \rightarrow f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} \rightarrow f'(x) = \frac{1}{x\ln x}$$

6.2. $\ln(\sin x)$

$$f'(x) = \frac{t'}{t} \rightarrow f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x} = \operatorname{cotg} x$$

6.3. $\ln(\cos x)$

$$f'(x) = \frac{t'}{t} \rightarrow f'(x) = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

2. Repaso de integración

- Reglas de la integración

- $\int\big(f(x) \mp g(x)\big)dx = \int f(x)dx \mp \int g(x)dx$
- $\int k \cdot f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$

- Tabla de integración inmediata

1. $\int k dx = kx + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \; \forall n \neq -1$

   $\int f' \cdot f^n dx = \frac{f^{n+1}}{n+1} + C$
3. $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

   $\int \frac{1}{f} \cdot f' dx = \int \frac{f'}{f} dx = \ln|f| + C$
4. $\int e^x\,dx = e^x + C$

   $\int e^f \cdot f' dx = e^f + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \; \forall > 0; a \neq 1$

   $\int a^f \cdot f'\,dx = \frac{a^f}{\ln a} + C$
6. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

   $\int f' \cdot \sin f\,dx = -\cos f + C$
7. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

   $\int f' \cdot \cos f\,dx = \sin f + C$
8. $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\mathrm{cotg}\,x$

   $\int \frac{f'}{\sin^2 f} dx = -\mathrm{cotg}\,f + C$
9. $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x\,dx =$
   $\int (1 + \tan x^2)\,dx = \tan x + C$

   $\int \frac{f'}{\cos^2 f} dx = \int f' \cdot \sec^2 f\,dx =$
   $\int f' \cdot (1 + \tan^2 f)\,dx = \tan f + C$
10. $\int \tan x\,dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx =$
    $-\ln|\cos x| + C$

    $\int f' \cdot \tan f\,dx = -\ln|\cos f| + C$
11. $\int coanx\;dx = \ln|\sin x| + C$

    $\int f' \cdot ctanf\;dx = \ln|\sin f| + C$
12. $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \mathrm{arcsen}\,x + C$

    $\int \frac{f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \mathrm{arcsen}\,f + C$
13. $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arccos x + C$

    $\int \frac{-f'}{\sqrt{1-f^2}} dx = \arccos f + C$
14. $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \mathrm{arcotg}\,x + C$

    $\int \frac{f'}{1+f^2} dx = \mathrm{arcotg}\,f + C$
15. $\int \frac{-1}{1+x^2} dx = \mathrm{arccotg}\,x + C$

    $\int \frac{-f'}{1+f^2} dx = \mathrm{arccotg}\,f + C$

2.1. Ejemplos de derivación con regla de la cadena

2.1. $\int 3x^8 dx \to \frac{3x^9}{9} + C \to \frac{x^9}{3} + C$

2.2. $\int (x^3 - 2x^2 + x) dx \to \frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + C$

2.3. $\int (5x^2 - 2x + 1) dx \to \frac{5x^3}{3} - \frac{2x^2}{2} + x + C \to \frac{5x^3}{3} - x^2 + x + C$

3.1. $\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} dx \to -\ln|\cos x| + C$

3.2. $\int \frac{\sin x}{\cos x + 3} dx = -\int \frac{-\sin x}{\cos x + 3} dx \to -\ln|\cos x + 3| + C$

3.3. $\int \frac{\cos x}{\sin x} dx \to \ln|\sin x| + C$

3.4. $\int \frac{1}{x \ln x} dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} dx \to \ln(\ln x) + C$

3.5. $\int \frac{2x+1}{2x^2+2x+5} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x+1}{2x^2+2x+5} dx \to \frac{1}{2} \ln|2x^2 + 2x + 5| + C$

3.6. $\int \frac{e^x}{3+4e^x} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4e^x}{3+4e^x} dx \to \frac{1}{4} \ln|e^x| + C = \frac{x}{4} + C$

4.1. $\int e^{5x} dx = \frac{1}{5} \int e^{5x} \cdot 5\, dx \to e^{5x} + C$

4.2. $\int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} \int 3x^2 e^{x^3} dx \to \frac{1}{3} e^{x^3} + C$

4.3. $\int 7x^3 e^{x^4} dx = \frac{7}{4} \int 4x^3 e^{x^4} dx \to \frac{-7}{4} e^{x^4} + C$

4.4. $\int \frac{e^{\ln x}}{x} dx = \int \frac{1}{x} \cdot e^{\ln x} dx \to e^{\ln x} + C = x + C$

5.1. $\int 3x \cdot 3^{x^2} dx = \frac{3}{2} \int 2x \cdot 3^{x^2} dx = \frac{3\left(3^{x^2}\right)}{2 \ln|3|} + C$

5.2. $\int x \cdot a^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int 2x a^{x^2} dx \to \frac{a^{x^2}}{2 \ln|a|} + C$

5.3. $\int (5x + 1) \left(9^{5x^2+2x}\right) dx = \frac{1}{2} \int (10x + 2) \left(9^{5x^2+2x}\right) dx \to \frac{9^{5x^2+2x}}{2 \ln|9|} + C$

6.1 $\int (-x) \sin(x^2 + 3) dx = \frac{-1}{2} \int 2x \sin(x^2 + 3) dx \to \cos(x^2 + 3) + C$

6.2. $\int \sin^2(2x)\, dx = \int \frac{1 - \cos 4x}{2} dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{-\cos 4x}{2} dx \to \frac{1}{2} x - \frac{1}{8} \sin 4x + C$

6.3. $\int \sin^3 x\, dx = \int \sin^2 x \sin x\, dx = \int (1 - \cos^2 x) \sin x\, dx = \int \sin x\, dx - \int \cos^2 x \sin x\, dx \to$
$\to -\cos x + \frac{1}{3} \cos^2 x + C$

7.1. $\int (6x^2 + 8x) \cos(x^3 + 2x^2 + 1) dx = 2 \int (3x^2 + 4x) \cos(x^3 + 2x^2 + 1) dx = 2 \sin(x^3 + 2x^2 + 1) + C$

7.2. $\int 2xe^2 \cdot \cos\left(e^{x^2}\right) dx \to \sin\left(e^{x^2}\right) + C$

7.3. $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx = \int \frac{1}{x} \cos(\ln x)\, dx \to \sin(\ln x) + C$

7.4. $\int \frac{-1}{2} x^2 \sin x^3\, dx = -\frac{1}{6} \int 3x^2 \sin x^3 dx \to \frac{-1}{6} \cos x^3 + C$

8.1. $\int \frac{-\frac{1}{x}}{\sin^2(\ln x)} dx = -\int \frac{\frac{1}{x}}{\sin^2(\ln x)} dx \to \operatorname{cotg}(\ln x) + C$

8.2. $\int \frac{7 \cos x \sin x}{\sin^2(\cos^2 x)} dx = \frac{7}{2} \int \frac{2 \cos x \sin x}{\sin^2(\cos^2 x)} dx \to \operatorname{cotg}(\cos^2 x) + C$

3. Recordatorio de Fórmulas trigonométricas

❖ Adicción

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$
$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

❖ Ángulo mitad

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$
$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

❖ Ángulo doble

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

❖ Transformaciones

$$\sin\alpha+\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\tan\alpha+\tan\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$
$$\tan\alpha-\tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

❖ Expresados de otra forma

$$\sin mx\cdot\sin nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)x)$$
$$\sin mx\cdot\cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x - \cos(m+n)\,x)$$
$$\sin mx\cdot\cos nx = \frac{1}{2}(\sin(m-n)x + \sin(m+n)\,x)$$
$$\cos mx\cdot\cos nx = \frac{1}{2}(\cos(m-n)x + \cos(m+n)x)$$

❖ Relaciones

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} = 1-\sin^2 x$$
$$\cos^3 x = \frac{3\cos x+\cos 3x}{4}$$
$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} = 1-\cos^2 x$$
$$\sin^3 x = \frac{3\sin x-\sin 3x}{4}$$
$$\sin^2 x\cos^2 x = \frac{1-\cos 4x}{8}$$
$$\sin^3 x\cos^3 x = \frac{\sin^3 2x}{8}$$
$$\tan^2 x = -1+\frac{1}{\cos^2 x}$$

❖ Relaciones entre funciones trigonométricas

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$
$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$$
$$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$
$$\sin^2 x+\cos^2 x = 1$$
$$\sec^2\alpha-\tan^2\alpha = 1$$
$$\csc^2\alpha-\cot^2\alpha = 1$$

4. Límites

1. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{2x^3+2x^2-10x+6}$

b) $\lim_{x\to 3} \frac{1}{3x-9}\left(\frac{5}{4x-2}-\frac{2}{x+1}\right)$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x-\sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

f) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x}$

g) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x-1}{x}$

h) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x-1}{x^2}$

i) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ con $n \in \mathbb{N}$ No se verá

j) $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

k) $\lim_{x\to 2} \frac{x^3+x^2-7x+2}{2x^3-5x^2+6x-8}$

l) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x^2-1}{4x^2}\right)^{\frac{x^3}{x-1}}$

m) $\lim_{x\to 0} (1-x)^{\frac{1}{x^2}}$

n) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{5x^3+4x}{5x^3-2}\right)^{x^2+1}$

o) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3-1}{x^3+3}\right)^{x^2-1}$

p) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{2x^2+3}\right)$

q) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{3x+2}{x^2+2}\right)^{\frac{3}{x}}$

r) $\lim_{x\to 2} \left(\frac{3}{x+1}\right)^{\frac{x^2+2x+5}{x^2-x-2}}$

s) $\lim_{x\to 0} (1+7x)^{\frac{6}{x}}$

t) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+7x}-\sqrt{x+4}\right)$

u) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}\right)$

v) $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+4}\right)$

w) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2-5x}{2-x}$

x) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-3x+2}{x-2}$

y) $\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3}$

z) $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+3x-2}$

2. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-2x}{6x^2+3}$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x}{2x^4-6}$

c) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x(x-3\sin x)}{x+\sin x}$

3. Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 2} \frac{\ln(x-1)}{e^{x-2}-1}$

b) $\lim_{x\to 0} \frac{x \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)}{(\sin 2x)^2 \cos x}$

c) $\lim_{x\to 0} \sqrt{1-\cos x \operatorname{cotg} x}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{(x^2-x^3)(\sqrt{1+x}-1)}{(\ln(1+4x)(1-\cos 2x))}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)\sin 4x}{\left(\sqrt[5]{1+x}-1\right)\sin 2x}$

f) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}$

g) $\lim_{x\to 0} x \ln(\sin x)$

Ejercicios de límites

1. $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-3x+2}{2x^3+2x^2-10x+6}$

$$\frac{1-3+2}{2+2-10+6} \overset{\text{ind.}}{\cong} \frac{0}{0} \to \text{Factorizando} \to \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x+3)(2)} = \frac{x+2}{2x+6} = \frac{3}{8}$$

2. $\lim_{x\to 3} \frac{1}{3x-9}\left(\frac{5}{4x-2} - \frac{2}{x+1}\right)$

$$\frac{1}{9-9}\left(\frac{5}{12-2} - \frac{2}{3+1}\right) = \frac{1}{0}(0) \overset{\text{Ind.}}{\cong} \to \text{Desarrollando} \to \frac{1}{3x-9}\left(\frac{5(x+1)-2(4x-2)}{(4x-2)(x+1)}\right) \to$$

$$\to \frac{1}{3x-9} \cdot \frac{-3x+9}{(4x-2)(x+1)} = \frac{-1}{(4x-2)(x+1)} = \frac{-1}{40}$$

3. $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - \sqrt{\cos 2x}}{\sin^2 x}$

$$\frac{1-1}{0} \overset{\text{Ind.}}{\cong} \frac{\left(\cos x - \sqrt{\cos 2x}\right)\left(\cos x + \sqrt{\cos 2x}\right)}{(\sin^2 x)\left(\cos x + \sqrt{\cos 2x}\right)} = \frac{\cos^2 x - \cos 2x}{\cos x \sin^2 x + \sin^2 x \sqrt{\cos 2x}} \overset{\text{Rel.1}}{\cong}$$

$$= \frac{\cos^2 x - \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^2 x\left(\cos^2 x + \sqrt{\cos 2x}\right)} = \frac{\sin^2 x}{\sin^2 x\left(\cos^2 x + \sqrt{\cos 2x}\right)} = \frac{1}{2}$$

4. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x}$

Demostración

$$\frac{1}{x}(\ln(1+x)) = \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} \to \text{Usamos la función del límite vinculante}$$

$$\text{sea}(a_n)_{n=1}^{\infty} \ \text{tal que} \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \ln(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = \ln e = 1 \ \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

*Lo importante de este ejercicio es el resultado pues el razonamiento no se pedirá

5. $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

$$\frac{1-1}{0} \overset{\text{ind}}{\cong} \frac{0}{0} \to \text{Procedemos al cambio de variable } x \to 0 \leftrightarrow y \to 0 \text{ entonces}$$

$$y = e^x - 1 \leftrightarrow y+1 = e^x \xrightarrow{\text{aplicamos ln}} \ln(y+1) = x \to \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{\ln(y+1)}{y}} \to \lim_{y\to 0} \frac{1}{\frac{1}{y}\ln(y+1)}$$

Demostración

$$\lim_{y\to 0} \frac{1}{\ln(y+1)^{\frac{1}{y}}} \to \text{usamos la función del límite vinculante}$$

$$\text{sea}(a_n)_{n=1}^{\infty} \ \text{tal que} \ \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(1+a_n)}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \ln(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = \ln e = 1$$

Luego

$$\lim_{y\to 0} \frac{\ln(y+1)}{y} = 1 \to \lim_{y\to 0} \frac{1}{\underbrace{\ln(y+1)^{\frac{1}{y}}}_{1}} = 1$$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

$\frac{\frac{0}{1}}{0}\overset{\text{ind}}{\cong}\frac{0}{0}\to$ separamos la función $\to \frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\to$ aplicamos el infinitésimo

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1$$

7. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$

$$\frac{1-1}{0}\overset{ind}{\cong}\frac{0}{0}\to\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x(\cos x+1)}\to\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\cos^2 x-1}^{-\sin^2 x}}{x(\cos x+1)}\to\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}\cdot\frac{-\sin x}{\cos x+1}=0$$

Relaciones inmediatas utilizadas

$$\sin^2 x\cos^2 x=1$$
$$\langle\sin x,0\rangle\sim\langle x,0\rangle\ infinitésimo$$

8. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$

$$\frac{1-1}{0}\overset{ind}{\cong}\frac{0}{0}\to\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)(\cos x+1)}{x^2(\cos x+1)}\to\lim_{x\to 0}\frac{\overbrace{\cos^2 x-1}^{-\sin^2 x}}{x^2(\cos x+1)}\to\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}\cdot\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}\frac{-1}{\cos x+1}=\frac{-1}{2}$$

Relaciones inmediatas utilizadas

$$\sin^2 x\cos^2 x=1$$
$$\langle\sin x,0\rangle\sim\langle x,0\rangle\ infinitésimo$$

9. $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ Este tipo de límite no se verá

$$\frac{1-1}{0}\overset{\text{ind}}{\cong}\frac{0}{0}\to\left.\begin{matrix}a=\sqrt[n]{1+x}\\ b=1\end{matrix}\right\}a^n-b^n=\left(\sqrt[n]{x+1}-1\right)\left[\left(\sqrt[n]{x+1}\right)^{n-1}+\_\_+\sqrt[n]{x+1}+1\right]$$

$$\sqrt[n]{x+1}-1=\frac{\overbrace{\left(\sqrt[n]{1+x}\right)^n-1^n}^{1+x-1=x}}{\left[\underbrace{\left(\sqrt[n]{x+1}\right)^{n-1}+\_\_+\sqrt[n]{x+1}+1}_{\text{n términos}}\right]}=\frac{1}{n}$$

10. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$

$$\frac{1+1+1-1}{0}\overset{\text{ind}}{\cong}\frac{3}{0}\to\text{multiplicamos todos los términos}\to\frac{6x^3+11x^2+6x\,1-1}{x}=$$
$$=6x^2+11x+6\to\lim_{x\to 0}6x^2+11x+6=6$$

11. $\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x^2-7x+2}{2x^3-5x^2+6x-8}$

$$\frac{8+4-14+2}{16-20+12-8}\overset{ind}{\cong}\frac{0}{0}\to Factorizando\to\lim_{x\to 0}\frac{(x-2)(x^2+3x-1)}{(x-2)(2x^2-x+4)}=\frac{9}{10}$$

12. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-1}{4x^2}\right)^{\frac{x^3}{x-1}}$

$$\overset{\text{ind}}{\cong}1^\infty\to\text{Aplicamos la fórmula}\to\lim_{x\to p}g(x)^{f(x)}=e^{\lim_{x\to p}f(x)(g(x)-1)}=\frac{x^3}{x-1}\left(\frac{4x^2-1}{4x^2}-1\right)\to$$
$$\to\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x-1}\left(\frac{4x^2-1-4x^2}{4x^2}\right)\to\lim_{x\to\infty}\frac{(x^3)(-1)}{(x-1)(4x^2)}\to\frac{-1}{4}$$

Luego

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^2-1}{4x^2}\right)^{\frac{x^3}{x-1}}=e^{\frac{-1}{4}}=\frac{1}{e^{\frac{1}{4}}}$$

13. $\lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x^2}}$

$\overset{\text{ind}}{=} 1^{\infty} \to$ Aplicando la fórmula $e^{\lim_{x\to p} f(x)(g(x)-1)} \to \lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}(1-x-1)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-1}{x}=\nexists$

Luego

$\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x^2}}$ No existe $\to$ Los límites laterales existen, pero no son iguales

- $\lim_{x\to 0}\frac{-1}{x}=-\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x^2}}=0$
- $\lim_{x\to 0}\frac{-1}{x}=+\infty \Rightarrow \lim_{x\to 0}(1-x)^{\frac{1}{x^2}}=+\infty$

14. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^3+4x}{5x^3-2}\right)^{x^2+1}$

$\overset{\text{ind}}{=} 1^{\infty} \to$ Aplicando la fórmula $e^{\lim_{x\to p} f(x)(g(x)-1)} \to \lim\limits_{x\to\infty}(x^2+1)\left(\frac{5x^3+4x}{5x^3-2}-1\right)\to$

$\to \lim\limits_{x\to\infty}(x^2+1)\left(\frac{5x^3+4x-5x^3+2}{5x^3-2}\right)\to \lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^2+1)(4x+2)}{5x^3-2}\to \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+x^2+4x+1}{5x^3-2}\to\frac{4}{5}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x^3+4x}{5x^3-2}\right)^{x^2+1}=e^{\frac{4}{5}}$$

15. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+3}\right)^{x^2-1}$

$\overset{\text{ind}}{=} 1^{\infty} \to$ Aplicando la fórmula $e^{\lim_{x\to p} f(x)(g(x)-1)} \to \lim\limits_{x\to\infty}(x^2-1)\left(\frac{x^3-1}{x^3+3}-1\right)\to$

$\to \lim\limits_{x\to\infty}(x^2-1)\left(\frac{x^3-1-x^3-3}{x^3+3}\right)\to \lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x^2-1)(-4)}{x^3+3}\to \lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4x^2-1}{x^3+3}=0\to$

$$\to \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-1}{x^3+3}\right)^{x^2-1}=e^0=1$$

16. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{2x^2+3}\right)$

$\overset{\text{ind}}{=} \infty-\infty \to$ conjugado $\to \frac{\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{2x^2+3}\right)\left(\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{2x^2+3}\right)}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{2x^2+3}}\to$

$\to \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+3x-2x^2+3}{\sqrt{x^2+3x}+\sqrt{2x^2+3}}\to$ Aplicando la regla de los grados $\to$

$$\to \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{2x^2+3}\right)=-\infty$$

17. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x+2}{x^2+2}\right)^{\frac{3}{x}}$

$\frac{2}{2}^{\infty} \overset{\text{ind}}{=} 1^{\infty} \to$ Aplicando la fórmula $e^{\lim_{x\to p} f(x)(g(x)-1)} \to \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3}{x}\right)\left(\frac{3x+2}{x^2+2}-1\right)\to$

$$\rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{3}{x}\right)\left(\frac{3x+2-x^2-2}{x^2+2}\right) \rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{(3)(3x-x^2)}{(x)(x^2+2)} \rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{-3x+9}{x^2+2} = \frac{9}{2} \rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{3x+2}{x^2+2}\right)^{\frac{3}{x}} = e^{\frac{9}{2}}$$

18. $\lim_{x\to 2}\left(\frac{3}{x+1}\right)^{\frac{x^2+2x+5}{x^2-x-2}}$

$$\frac{3^{\infty}}{3} \overset{\text{ind}}{\doteqdot} 1^{\infty} \rightarrow \text{Aplicando la fórmula } e^{\lim_{x\to p} f(x)(g(x)-1)} \rightarrow \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+2x+5}{x^2-x-2}\right)\left(\frac{3}{x+1}-1\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{x\to 2}\left(\frac{x^2+2x+5}{x^2-x-2}\right)\left(\frac{3-x-1}{x+1}\right) \rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{(x^2+2x+5)(-x+2)}{(x^2-x-2)(x+1)} \rightarrow \text{Factorizando} \rightarrow$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x^2+2x+5)(x-2)}{(-1)(x+1)(x+1)(x-2)} \rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+5}{-(x+1)^2} = \frac{2^2+2\cdot 2+5}{-(2+1)^2} = -\frac{13}{9} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{x\to 2}\left(\frac{3}{x+1}\right)^{\frac{x^2+2x+5}{x^2-x-2}} = e^{-\frac{13}{9}}$$

19. $\lim_{x\to 0}(1+7x)^{\frac{6}{x}}$

$$\overset{\text{ind}}{\doteqdot} 1^{\infty} \rightarrow \text{Aplicando la fórumla } e^{\lim_{x\to p} f(x)(g(x)-1)} \rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{6}{x}\right)(1+7-1) \rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{42x}{x} = 42 \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{x\to 0}(1+7x)^{\frac{6}{x}} = e^{42}$$

20. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+7x}-\sqrt{x+4}\right)$

$$\overset{\text{ind}}{\doteqdot} \infty \rightarrow \text{conjugado} \rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+7x}-\sqrt{x+4}\right)\left(\sqrt{x^2+7x}+\sqrt{x+4}\right)}{\sqrt{x^2+7x}+\sqrt{x+4}} \rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+7x-x+4}{\sqrt{x^2+7x}+\sqrt{x+4}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{Aplicando la regla de los grados} \rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+7x}-\sqrt{x+4}\right) = \infty$$

21. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}\right)$

$$\overset{\text{ind}}{\doteqdot} \infty-\infty \rightarrow \text{Conjugado} \rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+1}\right)\left(\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}\right)}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-x^2-1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}} \rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2+2x}+\sqrt{x^2+1}} \rightarrow \text{Aplicando la regla de los grados} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} \rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+1} = 1$$

22. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+4}\right)$

$$\overset{\text{ind}}{\doteqdot} \infty-\infty \rightarrow \text{Conjugado} \rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{3x-2}-\sqrt{x+4}\right)\left(\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+4}\right)}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+4}} \rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{3x-2-x+4}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+4}} \rightarrow$$

$$\rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{2x+2}{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x+4}} \rightarrow \text{Aplicando la regla de los grados} = \infty$$

23. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-5x}{2-x}$

$$\frac{0^2-5\cdot 0}{2-0} = \frac{0}{2} = 0$$

24. $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x-2}$

$$\overset{\text{ind}}{\cong}\frac{0}{0}\to \text{Factorizando}\to \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)}\to \lim_{x\to 2} x-1=2-1=1$$

25. $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}$

$$\overset{\text{ind}}{\cong}\frac{0}{0}\to \text{Factorizando}\to \lim_{x\to -3}\frac{(x+3)(x-3)}{x+3}\to \lim_{x\to -3} x-3=-3-3=-6$$

26. $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+3x-2}$

$$=\frac{1}{\infty}=0$$

27. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x}{6x^2+3}$

$$\overset{\text{ind}}{\cong}\frac{\infty}{\infty}\to \text{Regla de los grados}\to \lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{6+\frac{3}{x^2}}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

28. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x}{2x^4-6}$

$$\overset{\text{ind}}{\cong}\frac{\infty}{\infty}\to \text{Regla de los grados}\to \frac{1}{\infty}=0$$

29. $\lim_{x\to 0}\frac{\text{arctgx}}{x}$

$$=\frac{0}{0}\to \text{Procedemos al cambio de variable } x\to 0\leftrightarrow y\to 0 \text{ entonces } \begin{matrix} y=\text{arctgx}\\ x=\text{tgy}\end{matrix}$$

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{\tan y}\to \lim_{y\to 0}\frac{y}{\frac{\sin y}{\cos y}}\to \lim_{y\to 0}\frac{y\cos y}{\sin y}\to \lim_{y\to 0}\frac{\cos y}{\underbrace{\frac{\sin y}{y}}_{1}}\to \lim_{y\to 0}\frac{\cos y}{1}=1$$

Relaciones inmediatas utilizadas

$$\langle \sin y\,,0\rangle \sim \langle y,0\rangle \text{ infinitésimo}$$

30. $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x(x-3\sin x)}{x+\sin x}$

$$\overset{\text{ind}}{\cong}\frac{0}{0}\to \text{Desarrollando}\to \lim_{x\to 0}\frac{x\cos x-3\sin x\cos x}{x+\sin x}\to \text{dividimos por } x\to \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\frac{3\sin x\cos x}{x}}{1+\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}}\to$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+(-3\cos x)\cdot\overbrace{\frac{\sin x}{x}}^{1}}{2}\to \lim_{x\to 0}\frac{\cos x-3\cos x}{2}=\frac{-2\cos 0}{2}=-1$$

Relaciones inmediatas utilizadas

$$\langle \sin x\,,0\rangle \sim \langle x,0\rangle \text{ infinitésimo}$$

31. $\lim_{x\to 2}\frac{\ln(x-1)}{e^{x-2}-1}$

$$\overset{\text{ind}}{\triangleq}\frac{0}{0}\to \text{Procedemos al cambio de variable } x\to 2\leftrightarrow y\to 0 \text{ entonces}$$

$$x-1=y+1\leftrightarrow y=x-2\xrightarrow{\text{aplicamos el cambio}}\lim_{y\to 0}\frac{\ln(y+1)}{e^y-1}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{y}=1$$

Relaciones inmediatas utilizadas

$$\langle \ln(y+1),0\rangle\sim\langle y,0\rangle$$
$$\langle e^y-1,0\rangle\sim\langle y,0\rangle$$

32. $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{x\,arctg}\left(\frac{x}{2}\right)}{(\sin 2x)^2\cos x}$

Límite por partes $\overset{\text{ind}}{\triangleq}\frac{0}{0}\to\frac{\overbrace{\mathrm{x\,arctg}\left(\frac{x}{2}\right)}^{*1}}{\Big(\underbrace{\sin 2x}_{*2}\Big)^2\cos x}$

1*- $\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)}{x^\alpha}\to$ Hacemos cambio de variable $\to x\to 0\leftrightarrow y\to 0$ entonces $\begin{matrix} y=\mathrm{arctg}\frac{x}{2}\\ x=2\tan y\end{matrix}$

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{2\tan y}\to\lim_{y\to 0}\frac{y}{2y}=\frac{1}{2}$$
$$\langle \tan x,0\rangle\sim\langle x,0\rangle$$

Así

$$\langle \tan\frac{x}{2},0\rangle\sim\langle\frac{1}{2}x,0\rangle$$

2*- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x^\alpha}\to\sin 2x=2\cos x\sin x\to\lim_{x\to 0}\frac{2\cos x\sin x}{x^\alpha}\to\lim_{x\to 0}2\cos x\frac{\sin x}{x^\alpha}\to\alpha=1\to$

$$\to\lim_{x\to 0}2\cos x$$

Así

$$\langle \sin 2x,0\rangle\sim\langle 2x,0\rangle$$

Sustituyendo

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\frac{x}{2}}{(2x)^2\cdot\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{8x^2\cos x}\to\lim_{x\to 0}\frac{1}{8\cos x}=\frac{1}{8}$$

33. $\lim_{x\to 0}\sqrt{1-\cos x}\,cotgx$

Límite por partes $\overset{ind}{\triangleq}\ 0\cdot 0\to\sqrt{\underbrace{1-\cos x}_{1*}}\,\underbrace{cotgx}_{2*}$

1*- $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^\alpha}\to Conjugado\to\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^\alpha}\cdot\frac{(1+\cos x)}{(1+\cos x)}\to\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x}{x^\alpha(1+\cos x)}\to$

$$\to\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x^\alpha(1+\cos x)}\to\alpha=2\to\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\underbrace{x}_{1}}\cdot\frac{\sin x}{\underbrace{x}_{1}}\cdot\frac{1}{(1+\cos x)}\to\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=\frac{1}{2}$$

Así

$$\langle 1-\cos x,0\rangle\sim\langle {}^1\!/_2\,x^2,0\rangle$$

2*- $cotgx=\frac{1}{\tan x}$

$$\langle \tan x,0\rangle\sim\langle x,0\rangle$$

Sustituyendo

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{1-\cos x}\,cot\to\lim_{x\to 0}\sqrt{1-\cos x}\cdot\frac{1}{\tan x}\to\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{1}{2}x^2}\cdot\frac{1}{\tan x}\to\lim_{x\to 0}\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\frac{x}{\tan x}\to\sqrt{\frac{1}{2}}$$

34. $\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x^3)(\sqrt{1+x}-1)}{(\ln(1+4x)(1-\cos 2x))}$

Límite por partes $\overset{\text{ind}}{\rightleftarrows}\frac{0\cdot 0}{0\cdot 0}\to\frac{(x^2-x^3)\left(\overbrace{\sqrt{1+x}-1}^{3*}\right)}{\left(\underbrace{\ln(1+4x)}_{2*}\left(\underbrace{1-\cos 2x}_{1*}\right)\right)}$

$1*$- $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^\alpha}\to\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^\alpha}\cdot\frac{(1+\cos 2x)}{(1+\cos 2x)}\to\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 2x}{x^\alpha(1+\cos 2x)}\to\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x}{x^\alpha(1+\cos 2x)}\to$

$$\to\alpha=2\to\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}\cdot\frac{\sin 2x}{x}\cdot\frac{1}{1+\cos 2x}\to\lim_{x\to 0}\frac{4}{(1+\cos 2x)}=\frac{4}{2}=2$$

$$\langle\sin 2x\,,0\rangle\sim\langle 2x,0\rangle$$

Así

$$\langle 1-\cos 2x\,,0\rangle\sim\langle 2x^2,0\rangle$$

$2*$- $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+4x)}{x^\alpha}\to\alpha=1$; $\lim_{x\to 0}\frac{4\ln(1+4x)}{4x}=4$ ‖ Así $\to\langle\ln(x+1),0\rangle\sim\langle x,0\rangle\to\langle\ln(4x+1),0\rangle\sim\langle 4x,0\rangle$

$3*$- $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^\alpha}\to$ conjugado $\to\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-1}{x^\alpha}\cdot\frac{(\sqrt{1+x}+1)}{(\sqrt{1+x}+1)}\to\lim_{x\to 0}\frac{1+x-1}{x^\alpha(\sqrt{1+x}+1)}\to\alpha=1$

$$\to\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}+1}=\frac{1}{2}$$

Así

$$\langle\sqrt{1+x}-1,0\rangle\sim\langle\frac{1}{2}x,0\rangle$$

Sustituyendo

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x^3)\cdot\frac{1}{2}x}{(4x)(2x^2)}\to\lim_{x\to 0}\frac{(x^2-x^3)x}{16x^3}\to\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)x^3}{16x^3}=\frac{1}{16}$$

35. $\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)\sin 4x}{\left(\sqrt[5]{1+x}-1\right)\sin 2x}$

Límite por partes $\overset{\text{ind}}{\rightleftarrows}\frac{0\cdot 0}{0\cdot 0}\to\frac{\left(\overbrace{e^{2x}-1}^{1*}\right)\overbrace{\sin 4x}^{2*}}{\left(\underbrace{\sqrt[5]{1+x}-1}_{3}\right)\sin 2x}$

$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{x^\alpha}\to$ cambio de variable $x\to 0\leftrightarrow y\to 0$ entonces $y=e^{2x}-1\to y+1=e^{2x}$; $\ln(y+1)=2x\to x=\frac{\ln(y+1)}{2}$

Luego

$$\alpha=1\to\lim_{x\to 0}\frac{y}{\frac{\ln(y+1)}{2}}\to\lim_{x\to 0}2\cdot\frac{y}{\ln(y+1)}=2\to\langle\ln(x+1),0\rangle\sim\langle x,0\rangle$$

Así

$$\langle e^{2x}-1,0\rangle\sim\langle 2x,0\rangle$$

$2*$- $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x^\alpha}\to\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x+2x)}{x^\alpha}\to\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b\to\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)\cos(2x)+\cos(2x)\sin(2x)}{x^\alpha}$

$$\langle\sin 2x\,,0\rangle\sim\langle 2x,0\rangle\to\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)\cos(2x)}{x^\alpha}+\frac{\cos(2x)\sin(2x)}{x^\alpha}\right)\to\alpha=1\to$$

$$\to\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(2x)}{x}\cdot\frac{1}{\cos(2x)}+\frac{\sin(2x)}{x}\cdot\frac{1}{\cos(2x)}\right)\to\lim_{x\to 0}2\cos(2x)+2\cos(2x)\to\lim_{x\to 0}4\cos(2x)=4$$

Así

$$\langle\sin 4x\,,0\rangle\sim\langle 4x,0\rangle$$

3*- $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[5]{1+6x}-1}{x^{\alpha}} \to \begin{matrix} a=\sqrt[5]{1+6x} \\ b=1 \end{matrix} \Bigg\| a^5-b^5=1+6x-1=6x \to$

$$\to \left(\sqrt[5]{6x+1}-1\right)\left(\left(\sqrt[5]{6x+1}\right)^4+\_\_+\left(\sqrt[5]{6x+1}+1\right)\right)\to$$

$$\to \alpha=1\to \lim_{x\to 0}\frac{6x}{x^{\alpha}\left(\sqrt[5]{6x+1}\right)^4+\_\_+1}=\frac{6}{5}$$

Así

$$\langle \sqrt[5]{1+6x}-1,0\rangle \sim \langle \frac{6}{5}x,0\rangle$$

Sustituyendo

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2x)(4x)}{\left(\frac{6}{5}x\right)(2x)}\to \lim_{x\to 0}\frac{5}{6x}-4x=\frac{20}{6}=\frac{10}{3}$$

36. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\sin x}$

$$\overset{ind}{\cong}\frac{0\cdot\infty}{0}\to \langle \sin x,0\rangle\sim\langle x,0\rangle\to \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot x\cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)\to \lim_{x\to 0} x\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

Pues $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ está acotado, y así, una función que tiende a cero por otra acotada, su límite es 0

37. $\lim_{x\to 0} x\ln(\sin x)$

$$\overset{ind}{\cong} 0\cdot\infty\to \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{1/x}\to \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}\to \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}}\to \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos x}{-\sin x}=\frac{0}{0}\to$$

$$\to \lim_{x\to 0}\frac{-x^2\cos x}{x}=-x\cos x=0$$

<u>Tabla de relaciones inmediatas</u>

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\to \langle \ln(x+1),0\rangle\sim\langle x,0\rangle=1$
2. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}\to \langle e^x-1,0\rangle\sim\langle x,0\rangle=1$
3. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\langle \sin x,0\rangle\sim\langle x,0\rangle=1$ utilización del infinitésimo
4. $\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=\langle 1-\cos x,0\rangle\sim\langle {}^{1}/_{2}\,x^{\alpha},0\rangle=\frac{1}{2}$ utilización del infinitésimo
5. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\langle \tan x,0\rangle\sim\langle x,0\rangle=1$ utilización del infinitésimo
6. $\lim_{x\to p} g(x)^{f(x)}=e^{\lim_{x\to p} f(x)(g(x)-1)}$

- $\sin f(x)\sim f(x)$
- $\operatorname{arctg} f(x)\sim f(x)$
- $\tan f(x)\sim f(x)$
- $\cos f(x)\sim\frac{[f(x)]^2}{2}$
- $\ln\left(1+f(x)\right)\sim f(x)$
- $e^{f(x)}-1\sim f(x)$
- $b^{f(x)}-1\sim f(x)\cdot\ln b$ si $(b>0)$
- $\left(1+f(x)\right)^p-1\sim pf(x)$

4.1. Límites de funciones

Definición

– Llamaremos entorno de un punto $a \in \mathbb{R}$ a cualquier conjunto de la forma:

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} / |x-a| < \varepsilon\} \text{ con } \varepsilon > 0$$

– Llamaremos entorno reducido de un punto $a \in \mathbb{R}$ a cualquier conjunto de la forma:

$$(a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon) = \{x \in \mathbb{R} / 0 < |x-a| < \varepsilon\} \text{ con } \varepsilon > 0$$

– Llamaremos entorno reducido de ∞ a cualquier conjunto de la forma (m, ∞)
– Llamaremos entorno reducido de $-\infty$ a cualquier conjunto de la forma $(-\infty, m)$

4.2. Límite de una función en un punto

Definición

Sean $a \in \mathbb{R}$ y f una función real de variable real definida en un entorno reducido de a. Diremos que el límite de f cuando x tiende hacia a es L y lo denotaremos por:

$$\lim_{x\to a} f(x) = L, \text{si } \forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \ tal\ que\ si\ 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow$$

$$\left| \underbrace{f(x)}_{\text{valor de la imagen}} - \underbrace{L}_{\text{valor del límite}} \right| < \varepsilon$$

Conviene señalar que el límite de una función en un punto:

- Puede $\nexists$
- Es un concepto local (solo depende del comportamiento de la función cerca del punto considerado)
- Es independiente del valor que tome la función en dicho punto. De hecho la función puede no estar definida en el punto considerado, o bien, tomar dicho punto un valor que no coincida con el límite.

4.2.1. Ejemplos

1. Haciendo uso de la definición de límite probar que:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = 4 \xrightarrow{\text{ind.}} \frac{0}{0} \to \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\cdot(x+2)}{x-2} \to x+2 = 4$$

Para cada $\varepsilon > 0$ tenemos que probar que $\exists$ una $\delta > 0$ tal que para los x con:

$$0 < |x-2| < \delta \ se\ verifique\ que \ \left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| < \varepsilon$$

Para ello observamos que para los x con:

$$0 < |x-2| < \delta \ se\ satisface\ la\ desigualdad\ |f(x)-L| < \varepsilon = \left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| < \varepsilon$$

Para ello, observamos que para los x con:

$$0 < |x-2| < \delta \ se\ satisface\ la\ desigualdad\ \left|\frac{x^2-4}{x-2} - 4\right| \to \left|\frac{(x-2)(x+2)}{x-2} - 4\right| \to$$

$$\to |(x+2)-4| = |x+2| < \delta$$

Hemos de coger los deltas que cumplan la relación, por tanto, es suficiente tomar $\varepsilon = \delta$ para obtener:

$$\left|\frac{x^2-4}{x-2}-4\right| < \varepsilon$$

2. Veamos que $\nexists\ \lim_{x\to\infty} \cos\frac{1}{x}$

Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\exists$ el límite y que vale L. Por definición tendremos que:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ tal\ que\ si\ 0 < |x| < \delta\ \Rightarrow\ |f(x) - L| < \varepsilon = \left|\left(\cos\frac{1}{x}\right) - L\right| < \varepsilon$$

Como esto será cierto para cualquier valor de ε , en particular lo será para $\varepsilon = 1$. Es decir, se verificará

$$\exists\ \ \delta > 0\ tal\ que\ si\ 0 < |x| < \delta \to \left|\left(\cos\frac{1}{x}\right) - L\right| < 1\ tenemos\ k \in \mathbb{N}\ \text{tal que}\ \frac{1}{2k\pi} < \delta$$

- Para $x = \frac{1}{2k\pi}$ tendremos que $\left|\left(\cos\frac{1}{1/_{2k\pi}}\right) - L\right| < 1 \to |(\cos 2k\pi) - L| < 1 \to$

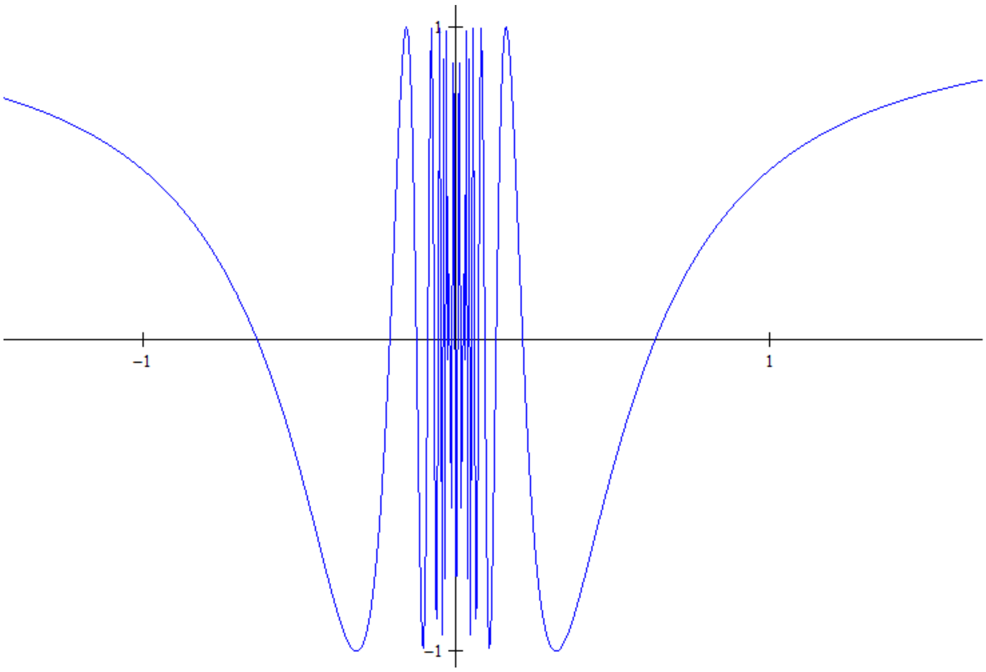
$$\to |1 - L| < 1 \to 1 - L < 1 \to -L < 0 \to L > 0$$

- Para $x = \frac{1}{(2k+1)\pi}$ también se verificará que $\frac{1}{(2k+1)\pi} < \delta. Luego$

$$\left|\left(\cos\frac{1}{\frac{1}{(2k+1)\pi}}\right) - L\right| < 1 \to |(\cos(2k+1)\pi) - L| < 1 \to |-1 - L| < 1 \to$$

$$\to |1 + L| < 1 \to 1 + L < 1 \to L < 0$$

Hemos llegado a una contradicción ya que por un lado hemos llegado a que $L > 0$ y por otro a que $L < 0$. Por tanto, lo que hemos supuesto no era cierto, luego, el límite $\nexists$.



Gráfica de la función $\cos\frac{1}{x}$ en un entorno de 0. Se puede observar que al acercarnos a 0 la función oscila sin aproximarse a ningún valor concreto.

4.3. Unicidad del límite

Teorema

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a} f(x) = L_2$ entonces $L_1 = L_2$ Es decir, si ∃ límite de una función en un punto, es único.

4.4. Límites laterales

Definición

- Diremos que la función f tiene límite L cuando x tiende a un punto a por la derecha y se denota por:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

$$\text{Si } \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \textit{ tal que si } a < x < a + \delta \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon$$

- Diremos que la función f tiene límite L cuando x tiende a un punto a por la izquierda y se denota por:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$$

$$\text{Si } \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0 \textit{ tal que si } a - \delta < x < a \;\Rightarrow\; |f(x) - L| < \varepsilon$$

Proposición

$\exists \lim_{x\to a} f(x) = L \leftrightarrow \exists$ los límites laterales de f en a y valen L, es decir:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

Por tanto el límite de f en el punto a ∄ si los límites laterales son distintos

(Ver ejercicios de 6.3.1. Continuidad Pág. 27-28)

4.5. Límites infinitos y en el infinito

Definición

Sea $a \in \mathbb{R}$ y sea f función definida en un entorno reducido de a. Diremos que:

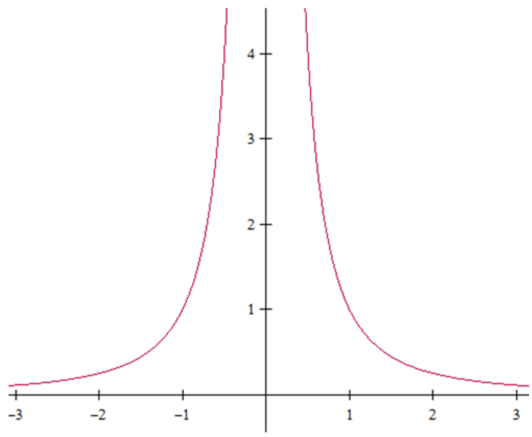
- $\lim_{x\to a} = \infty$ si : $\forall\, m > 0, \exists\, \delta > 0$ *tal que si* $0 < |x - a| < \delta \to f(x) > m$
- $\lim_{x\to a} = -\infty$ si : $\forall\, m > 0, \exists\, \delta > 0$ *tal que si* $0 < |x - a| < \delta \to f(x) < m$

4.5.1. Ejemplos

1. $f(x) = \frac{1}{x^2}$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x^2} = \infty$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^2} = \infty$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \nexists$$

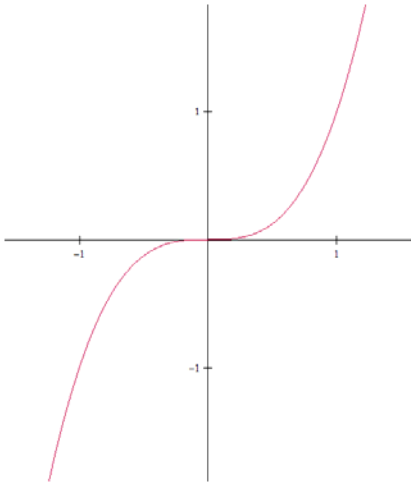
Puede observarse que al aproximarse a 0 por la derecha la función crece hacia ∞ y al aproximarse por la izquierda decrece hacia $-\infty$.

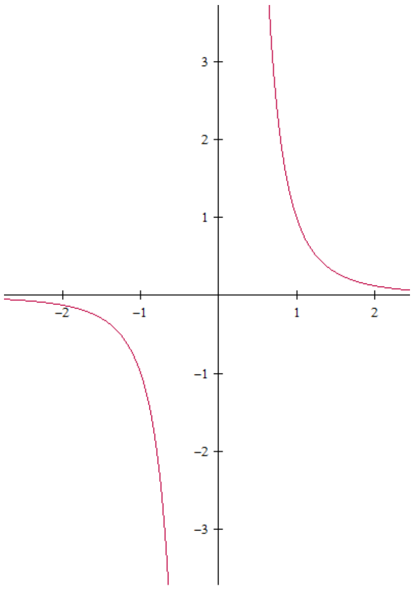


2. $f(x)x^3$

$$\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$$

Se observa como la función crece hacia ∞ cuando x crece y como decrece hacia $-\infty$ cuando x decrece.





3. $f(x) = \frac{1}{x^3}$

$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^3} = -\infty$; $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^3} = \infty$

$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3} = 0$; $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^3} = 0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3} = \nexists$$

Puede observarse que al aproximarse a 0 por la derecha la función crece hacia ∞ y al aproximarse por la izquierda decrece hacia $-\infty$.

Se puede observar también que según crece el valor de x, la función va aproximándose cada vez más a 0. Lo mismo ocurre cuando decrece el valor de x.

4.6. Desigualdades entre función y límites

Proposición

Sean f y g dos funciones tales que $f(x) \le g(x)$ en un entorno reducido de un punto $a \in \mathbb{R}\,\{\pm\infty\}$ si $\exists\ \lim_{x\to a} f(x)$ y $\lim_{x\to a} g(x)$, $\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$

No siempre los límites serán rigurosos, en el caso en el que se tenga $f(x) < g(x)$ sólo se puede concluir que $\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$

4.6.1. Ejemplos

1. Si tomamos $f(x) = 0$ y $g(x) = x^2$, tenemos que:$f(x) < g(x)\ \forall x \ne 0$. Sin embargo, cuando tenemos límites en 0 tenemos que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim_{x\to 0} g(x)$.

4.6.1. Regla del emparedado

Sean f, g y h tres funciones tales que $f(x) \le h(x) \le g(x)$ en un entorno reducido de $a \in \mathbb{R}\,\{\pm\infty\}$. Si verifica que $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = L$, con $L \in \mathbb{R}\,\{\pm\infty\} \Rightarrow \lim_{x\to a} h(x) = L$.

Estos resultados, así como los dados dentro del apartado de indeterminaciones, se pueden extender a límites laterales. Basta con imponer que las desigualdades se verifiquen en algún conjunto de la forma $(a, a+\delta)$ para los límites por la derecha y $(a-\delta, a)$ para los límites por la izquierda.

4.6.1.1 Ejemplos

1. $\lim_{x\to\infty} \frac{1+|\sin x|}{x}$

Se tiene que $\frac{1}{x} \leq \frac{1+|\sin x|}{x} \leq \frac{2}{x}$ como se verifica $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0$ por la regla del emparedado tenemos que $\lim_{x\to\infty} \frac{1+|\sin x|}{x} = 0$

2. $\lim_{x\to\infty} \frac{4+|\cos x|}{x}$

Se tiene que $\frac{4}{x} \leq \frac{4+|\cos x|}{x} \leq \frac{5}{x}$ como verifica $\lim_{x\to\infty} \frac{4}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{5}{x} = 0$ por la regla del emparedado tenemos que $\lim_{x\to\infty} \frac{4+|\cos x|}{x} = 0$

5. Indeterminaciones

Proposición

Si $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y g está acotada en un entorno reducido de a $\Rightarrow$ $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = 0$

Teorema

Sea f definida en un intervalo abierto I y sea g definida en un intervalo abierto tal que $f(I) \subseteq J$. Sea $a \in I$ si $\lim_{x\to a} f(x) = b, \lim_{y\to b} g(y) = L$, y $\forall x \in I$ se tiene que $f(x) \neq b$ entonces

$$\lim_{x\to a} (f \circ g)(x) = L$$

Corolario

Sea f definida en un entorno reducido de $a \in \mathbb{R}$ se tiene que: $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} f(y+a)$

Proposición

Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f\left(\frac{1}{y}\right) \to \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{y\to\infty} f\left(\frac{1}{y}\right) \to \lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{y\to 0^-} f(x) = \lim_{y\to -\infty} f\left(\frac{1}{y}\right)$$

Proposición

Si $\lim_{x\to a} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to a} g(x) = L_2$, con a, L_1 y $L_2 \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\} \Rightarrow$:

- $\lim_{x\to a}\big(f(x) \pm g(x)\big) = L_1 \pm L_2$ (Salvo en casos de $\pm(\infty-\infty)$ que da lugar a indeterminación)
- $\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = L_1 \cdot L_2$ (Salvo en el caso de que sea 0 y el otro $\pm\infty$ que dará lugar a indeterminación)
- $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{L_1}{L_2}$ (Salvo si ambas son 0 ó $\pm\infty$ que dará lugar a indeterminación)
- $\lim_{x\to a}\big(f(x)^{g(x)}\big) = {L_1}^{L_2}$ con $f(x) \geq 0$ (Salvo con $L_1 = 1$ y $L_2 = \pm\infty, L_1 = \infty$ y $L_2 = 0$, $L_2 = L_1 = 0$ que dará lugar a indeterminación)

- ❖ $L \pm \infty = \pm\infty$ con $L \in \mathbb{R}$
- ❖ $\infty + \infty = \infty$
- ❖ $-\infty - \infty = -\infty$
- ❖ $\frac{L}{(\pm\infty)} = 0$, si $L \in \mathbb{R}$
- ❖ $\frac{\pm\infty}{L} = \text{Signo}(L)\cdot(\pm\infty)$, si $L \in \mathbb{R}-\{0\}$
- ❖ $L\cdot(\pm\infty) = \text{Signo}(L)\cdot\pm\infty, L \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}-\{0\}$

Proposición

Sean f y g dos funciones tales que: $\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \neq 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = 0, \Rightarrow$

- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ si $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$ *en un entorno reducido de a*
- $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$ si $\frac{f(x)}{g(x)} < 0$ *en un entorno reducido de a*
- $\nexists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ en el resto de casos

5.1. Tipos de indeterminaciones

$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, \infty - \infty, 1^{\infty}, \infty^0, 1^{\infty}, \infty^0, 0^0$ son las distintas indeterminaciones que surgen al utilizar la aritmética de límites. Suponemos que f y g son dos funciones definidas en un entorno reducido de $a \in \mathbb{R}\{\pm\infty\}$.

Definición

Diremos que f y g son equivalentes en a y lo denotaremos por $f \sim g$ (ó por $f(x) \sim g(x)$ cuando $x \to a$) si $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Proposición

Si f y g son equivalentes en a y $\exists \lim_{x\to a} f(x) \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}, \Rightarrow \exists \lim_{x\to a} g(x)$ y además $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$

Proposición

Si f y g son equivalentes en a $\Rightarrow f^p y g^p$ son equivalentes en a (siempre que tengan sentido $f^p y g^p$)

Proposición

Si $\exists \lim_{x\to a} f(x) = L \neq 0$ y es finito $\Rightarrow f(x) \sim L$ cuando $x \to a$

Definición

Diremos que f y g son infinitésimos equivalentes en a si f y g son equivalentes en a y $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$

5.1.1. Principio de sustitución

Si $f(x) \sim g(x)$ cuando $x \to a \Rightarrow$ se verificará:

- $\lim_{x\to a} f(x) \cdot F(x) = \lim_{x\to a} g(x) \cdot F(x)$
- $\lim_{x\to a} \frac{F(x)}{f(x)} = \lim_{x\to a} \frac{F(x)}{g(x)}$

5.2. Infinitésimos equivalentes

Para $\lim_{x\to a} f(x) = 0$

- $\sin f(x) \sim f(x)$
- $\operatorname{arctg} f(x) \sim f(x)$
- $\tan f(x) \sim f(x)$
- $\cos f(x) \sim \frac{[f(x)]^2}{2}$
- $\ln(1 + f(x)) \sim f(x)$
- $e^{f(x)} - 1 \sim f(x)$
- $b^{f(x)} - 1 \sim f(x) \cdot \ln b$ si $(b > 0)$
- $(1 + f(x))^p - 1 \sim pf(x)$

5.2.1. Ejemplos

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x^2)}{x \sin x}$

- $\ln(1+f(x)) \sim f(x)$ si $f(x) \to 0$ particularizando $3x^2 = 0$, por tanto $\ln(1+3x^2) \sim 3x^2$
- $\sin f(x) \sim f(x)$ si $f(x) \to 0$ particularizando $x = 0 \to \sin x \sim x$

Así $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+3x^2)}{x \sin x} \to \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2}{x^2} \to \lim\limits_{x\to 0} 3 = 3$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x\cos^2 x} - 1}{\operatorname{arctg}(x\cos x)}$$

- $e^{f(x)} - 1 \sim f(x)$ si $f(x) \to 0$ particularizando $x\cos^2 x = 0$, por tanto $e^{x\cos^2 x} - 1 \sim x\cos^2 x$
- $\operatorname{arctg}(f(x)) \sim f(x)$ si $f(x) \to 0$particularizando $x\cos x = 0$, por tanto $\operatorname{arctg}(x\cos x) \sim x\cos x$

Así $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x\cos^2 x}-1}{\operatorname{arctg}(x\cos x)} \to \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cos^2 x}{x\cos x} \to \lim\limits_{x\to 0} \cos x = 1$

5.2.2. Ordenes de infinitud

Sean $a > 0, b > 1$ y $c > 0$. Se verificará que:

- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{ax}}{b^x} = \infty$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{b^x}{x^c} = \infty$
- $\lim_{x\to\infty} \frac{x^c}{\ln x} = \infty$

En el orden de infinitud de

$$\ln x < x^c < b^x < x^{ax}$$

5.2.3. Ejemplos

1. $\lim_{x\to 0^+} x^r \ln x = 0$ para $r > 0$; si realizamos el cambio $x = {}^{1}/_{y}$, tendremos que:

$$\lim_{x\to 0^+} x^r \ln x = \lim_{y\to\infty} \frac{\ln({}^{1}/_{y})}{y^r} = \lim_{y\to\infty} \frac{-\ln y}{y^r} = \lim_{y\to\infty} \frac{-1}{\frac{y^r}{\ln y}} = 0$$

El límite del denominador es ∞ según la proposición, por tanto, el límite que queríamos calcular será 0. (Ver segunda proposición de 5. Indeterminaciones si el cambio no quedó claro).

2. $\lim_{x\to 0^+} x^r \cdot 2^x = 0$ para $r > 0$; si realizamos el cambio $x = {}^{1}/_{y}$, tendremos que:

$$\lim_{x\to 0^+} x^r \cdot 2^x = \lim_{x\to 0^+} \frac{2^{1/y}}{y^r} = 0$$

El límite del denominador es ∞ según la proposición, por tanto, el límite que queríamos calcular será 0.

5.3. Regla de L'hôpital

Sean f y g dos funciones definidas y derivables en un entorno reducido de $x_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ sí $\exists$ $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R}\{\pm\infty\}$ y han de verificarse alguna de las tres condiciones.

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$
- $\lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$
- $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$

Entonces $\exists\ lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$, esta regla sirve para los límites laterales

5.3.1. L'hôpital directa

Es aplicable a las indeterminaciones del tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x - \cos^2 x}{x} \overset{ind}{\cong} \frac{0}{0}$$

Llamamos

$f(x) = e^x - \cos^2 x$ y $g(x) = x$ ambas funciones son derivables en $\mathbb{R}$, y se verifica que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

$$f'^{(x)} = e^x + 2\cos x\cdot\sin x \text{ y } g'(x) = 1$$

Como $\lim_{x\to 0}\frac{f\prime(x)}{g\prime(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x+2\cos x\cdot\sin x}{1} = 1$

Entonces

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^x - \cos^2 x}{x} = 1$$

5.3.2. L'hôpital indirecta

- $0\cdot\infty$: Para resolver indeterminaciones $0\cdot\infty$ podemos aplicar la igualdad $y\cdot z = \frac{y}{\left(\frac{1}{z}\right)}$ antes de la regla de L'hôpital, transformando la indeterminación en un tipo $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(\sin x) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{1/x}$$

Llamamos

$$f(x) = \ln(\sin x) \to f'(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$g(x) = \frac{1}{x} = (x)^{-1} \to g'(x) = -(x)^{-2} \to \frac{-1}{x^2}$$

Ambas funciones son derivables en $(0,\infty)$ y se verifica que $\lim_{x\to 0^+} g(x) = \infty$ como:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{-1}{x^2}} = \frac{-x^2\cos x}{x} \to \lim_{x\to 0^+} -x\cos x = 0$$

Entonces

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(\sin x)}{1/x} = \lim_{x\to 0} x\ln(\sin x) = 0$$

- $\infty - \infty$: Para resolver las indeterminaciones de este tipo se aplica $z = \ln(e^z)$ antes de aplicar la regla de L'hôpital, transformándose en una indeterminación del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x}{x} + \ln x\right) = \infty - \infty$$

Transformamos

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x}{x} + \ln x\right) = \left\{\frac{\cos x}{x} + \ln x = \ln\left(e^{\left(\frac{\cos x}{x}+\ln x\right)}\right)\right\} \to \lim_{x\to 0^+}\ln\left(xe^{\frac{\cos x}{x}}\right)$$

Calculemos el límite de la función que está dentro del logaritmo

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{\cos x}{x}}$$

Transformemos la indeterminación $0\cdot\infty$ en una del tipo $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim_{x\to 0^+} xe^{\frac{\cos x}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{xe^{\frac{\cos x}{x}}}{1/x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Ahora aplicamos L'hôpital directa

$$f(x) = e^{\frac{\cos x}{x}} \to f'(x) = \frac{e^{\frac{\cos x}{x}}\cdot(-x\sin x - \cos x)}{x^2}$$

$$g(x) = \frac{1}{x} = (x)^{-1} \to g'(x) = -(x)^{-2} \to \frac{-1}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-(x\sin x + \cos x)e^{\frac{\cos x}{x}}}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}} \to \lim_{x\to 0^+}\left(\underbrace{x\sin x}_{0} + \cos x\right)e^{\frac{\cos x}{x}} \to \lim_{x\to 0^+} \cos x\, e^{\frac{\cos x}{x}} = \infty$$

Luego el límite de $\frac{f'}{g'} = +\infty$ y como consecuencia de esto el límite de $\frac{f}{g}$ también es $+\infty$, por tanto

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cos x}{x} + \ln x\right) = \lim_{x\to 0^+} \ln\left(\frac{e^{\frac{\cos x}{x}}}{1/x}\right) = \infty$$

- $0^0, \infty^0, 1^\infty$: La regla de L'hôpital puede aplicarse a la resolución de indeterminaciones de este tipo mediante el cambio $y^z = e^{z\ln y}$

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{1/\sin x}$$

Transformando

$$\left.\begin{array}{l} y = \cos x \\ z = 1/\sin x \end{array}\right\} \lim_{x\to 0} e^{(1/\sin x)\cdot\ln(\cos x)} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\cos x)}{\sin x}}$$

Calculemos el límite del exponente

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\sin x}$$

Definimos

$$f(x) = \ln(\cos x) \to f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} \text{ y } g(x) = \sin x \to g'(x) = \cos x$$

Estas dos funciones son derivables en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ verificándose que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0$$

Como

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{\cos x} \to \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{\cos^2 x} = 0$$

Entonces

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{\sin x} = 0$$

De donde

$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{\ln(\cos x)}{\sin x}} = e^0 = 1$$

6. Continuidad

6.1. Continuidad de una función en un punto

Definición

Sea f una función definida en un entorno de un punto a. Diremos que f es continua en a, si $\exists \lim_{x\to a} f(x)$, es finito y coincide con el valor de f(a), es decir, $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Proposición

Si f y g son continuas en a, entonces:

1- $f \pm g$ es continua en a.
2- $f \cdot g$ es continua en a.
3- f/g es continua en a si $g(a) \neq 0$.

Corolario

1- Toda función polinómica es continua en todo punto de $\mathbb{R}$.
2- Toda función racional es continua en todo punto de $\mathbb{R}$, salvo en aquellos puntos que anulan el denominador.

Teorema

Si f es continua en a y g es continua en f(a), entonces la función $g \circ f$ es continua en a. (Ver ejemplo 2.1)

6.2. Tipos de discontinuidades

$$\text{Discontinuidad}\begin{cases}\text{Evitable}\\ \text{Esencial}\begin{cases}\text{De } 1^a \text{ especie}\begin{cases}\text{De salto finito}\\ \text{De salto infinito}\end{cases}\\ \text{De } 2^a \text{ especie}\end{cases}\end{cases}$$

- Discontinuidad evitable

Diremos que una función f tiene una discontinuidad evitable en a si $\exists \lim_{x\to a} f(x)$ y es finito, pero $\nexists$ f(a) ó bien $f(a) \neq \lim_{x\to a} f(x)$. Es decir, ocurre cuando existen el límite y la imagen pero son distintas; y también ocurre cuando existe límite pero no la imagen. (Ver ejemplo 1)

- Discontinuidad de salto finito

Diremos que una función f tiene una discontinuidad de salto finito en a si $\exists$ y son finitos los límites laterales $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x)$, pero son distintos. (Ver ejemplo 2.2)

- Discontinuidad de salto infinito

Diremos que una función f tiene una discontinuidad de salto infinito en a si $\exists$ y son infinitos cualquiera de los límites laterales $\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ ó $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$. (Ver ejemplo 3)

Diremos que una función f tiene una discontinuidad de primera especie en a, si la discontinuidad es evitable, de salto finito o infinito. En cualquier otro caso diremos que la discontinuidad es de segunda especie.

6.3. Continuidad en intervalo

Definición

- Diremos que la función f es continua por la derecha en a si $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.
- Diremos que la función f es continua por la izquierda en a si $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Una función f es continua en a ↔ f es continua por la derecha y por la izquierda de a.

Tipos de intervalos

- Intervalo abierto (a, b): Sea $I \in \mathbb{R}$ un intervalo abierto diremos que f es continua en I si lo es en cada punto de I.
- Intervalo abierto por la izquierda, cerrado por la derecha (a,b]: Diremos que f es continua en (a,b] si es continua en (a, b) y continua por la izquierda en b.
- Intervalo cerrado por la izquierda, abierto por la derecha [a,b): Diremos que f es continua en [a,b) si es continua en (a, b) y continua por la derecha en a.
- Intervalo cerrado $[a, b]$: Diremos que f es continua en $[a, b]$ si es continua en (a, b), continua por la derecha en a y continua por la izquierda en b.

6.3.1 Ejemplos

1. Estudia la continuidad en $x = 2$ de $\frac{x^2-5x+6}{x-2}$

Primero realizamos la imagen

$$f(2) = \frac{0}{0} \nexists$$

A continuación realizamos los límites

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-5x+6}{x-2} = \frac{0}{0} \to \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f = \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f = \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)} = -1 \end{array} \right\} \text{Discontinuidad evitable}$$

2. Estudia la continuidad

$$f(x) = \begin{cases} 2-x \text{ si } x < 1 \\ x^2 \text{ si } 1 \le x \le 2 \\ x-3 \text{ si } x > 2 \end{cases}$$

2.1- Continuidad en $x = 1$

Primero realizamos la imagen

$$f(1) = 1^2 = 1$$

A continuación realizamos los límites

$$\left. \begin{array}{r} \lim\limits_{x\to 1^-} f = (2-1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f = (1^2) = 1 \end{array} \right\} \exists \lim_{x\to 1} f = 3 \;\therefore f(x) = \text{es continua en } \mathbb{R}$$

2.2- Continuidad en $x = 2$

Primero realizamos la imagen

$$f(2) = (2^2) = 4$$

A continuación realizamos los límites

$$\left.\begin{array}{r}\lim_{x\to 2^-} f = (2^2) = 1\\ \lim_{x\to 2^+} f = (2-3) = 1\end{array}\right\} \exists \lim_{x\to 2} f \ \therefore \text{ discontinuidad de salto finito}$$

3. Estudia la continuidad en $x = 3$ de $f(x) = \frac{x^2+1}{x-3}$

Primero realizamos la imagen

$$f(3) = \frac{10}{0} \nexists$$

A continuación realizamos los límites

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2+1}{x-3} = \frac{10}{0} \to \left\{\begin{array}{l}\lim_{x\to 2^-} f = \dfrac{x^2+1}{x-3} = \dfrac{10}{0^+} = +\infty\\ \lim_{x\to 2^+} f = \dfrac{x^2+1}{x-3} = \dfrac{10}{0^-} = -\infty\end{array}\right\} \text{Discontinuidad de salto infinito}$$

4. Para la función, calcula los límites laterales:

$$f(x) = \begin{cases} x^3+1 & x \le 1\\ x+4 & x > 1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x^3 + 1 = 2$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x + 4 = 5$$
$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 \neq \lim_{x\to 1^-} f(x) = 5$$

Por tanto, podemos decir que el límite de f en el punto 1 $\nexists$ ya que los límites laterales son distintos.

6.4. Teorema de Bolzano

Sea f una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$. Si $f(a)\cdot f(b) < 0$, entonces existe un punto $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = 0$, es decir:
Si f toma signo distinto en los extremos del intervalo entonces la función se anula en algún punto del interior del intervalo.
*Si $f(a)\cdot f(b) \le 0$ entonces $\exists\, c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$
* El teorema de Bolzano no garantiza que el punto en el que se anula la función sea el único, lo que nos garantiza es que hay un punto en el que se anula, pero podría haber más.

6.4.1. Ejemplos

Tenemos una función $f(x) = \cos x$ en el intervalo $[0, 3\pi]$

En este intervalo la función verifica la hipótesis del teorema de Bolzano ya que $f(0) = 1$ y $f(3\pi) = -1$, por tanto, el teorema de Bolzano nos asegura que se anula en algún punto del intervalo $(0,3\pi)$.

De hecho la función se anula en 3 puntos $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ y $\frac{5\pi}{2}$

7. Calculo diferencial

7.1 Derivación en un intervalo

Definición de derivada

Sea f definida en un entorno de un punto x_0 si ∃ (y éste es finito) el límite, entonces, diremos que la función $f(x)$ es derivable en el punto x_0 y llamaremos al límite derivada f en el punto x_0.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \text{ ó } \lim_{h\to 0}\frac{f(x)-(x_0)}{\underbrace{x}_{\text{final}} - \underbrace{x_0}_{\text{inicial}}} \text{ si } x = x_0 + h$$

7.1.1. Ejemplos

1. Halla la derivada de la función $f(x) = \frac{2}{x+1}$ en el punto $x = 3$ aplicando la definición de la derivada.
   - $f(x_0) \to f(3) = \frac{2}{3+1} \to \frac{1}{2}$
   - $f(x_0+h) \to f(3+h) = \frac{4}{3+h+1} \to \frac{4}{4+h}$
   - $f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{2}{4+h} - \frac{1}{2} \to \frac{4-h-4}{8+2h} \to \frac{-h}{8+2h}$
   - $f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \to \frac{\frac{-h}{8+2h}}{h} \to \frac{-1}{2(4+h)} \to \frac{-1}{8}$
2. Halla la derivada de la función $f(x) = x^3$ en el punto $x = 1$ aplicando la definición de la derivada.
   - $f(x_0) \to f(1) = 1^3 = 1$
   - $f(x_0+h) \to f(1+h) = (1+h)^3 = 1 + 3h + 3h^2 + 3h^3$
   - $f(x_0+h) - f(x_0) = 1 + 3h + 3h^2 + 3h^3 - 1 = 3h + 3h^2 + 3h^3$
   - $f'^{(x_0)} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \to \frac{3h+3h^2+3h^3}{h} = 3 + 3h + 3h^2 \to 3$

Recta tangente

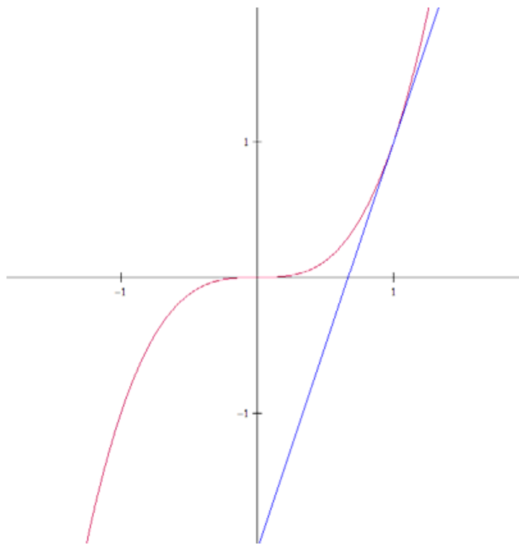
Sea $f: (a,b) \to \mathbb{R}$ derivable en un punto $x_0 \in (a,b) \Rightarrow$ la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto x_0 es $f'(x)$ y, por tanto, la ecuación de dicha recta es:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

7.1.2. Ejemplos

1. Halla la recta tangente a la función $f(x) = x^3$ en el punto $f(1)$

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \to$$
$$\to f'(1)(x-1) + f(1) \to$$
$$\to y = 3\cdot(x-1) + 1 \to y = 3x - 2$$



Teorema

Si f es derivable en $x_0 \Rightarrow$ f es continua en x_0

Derivadas laterales

Sea $f:[a,b] \to \mathbb{R}$. Diremos que f es derivable por la derecha en el punto a si ∃ y es finito.

– $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'_+(a)$

Diremos que es derivable por la izquierda en el punto b si ∃ y es finito.

– $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h} = f'_-(b)$

A este tipo de derivadas se les llama derivadas laterales

Proposición

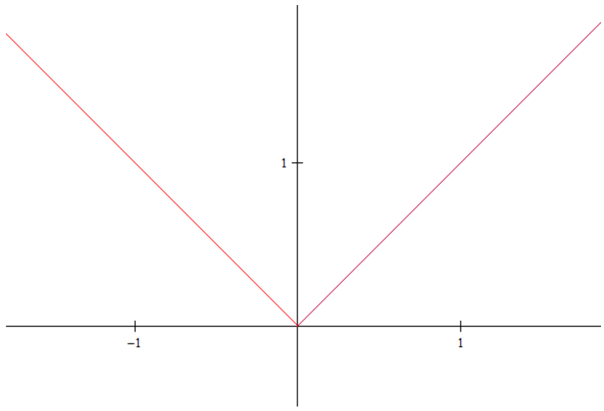
Sea f definida en un entorno $x_0 \Rightarrow f$ es derivable en $x_0 \leftrightarrow$ f es derivable en $x_0 \leftrightarrow$ f es derivable en x_0 tanto por la derecha como por la izquierda y $f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$. En este caso:

$$f'(x_0) = f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$$

7.1.3. Ejemplo

Consideramos la función $f(x) = |x|$, sus derivadas son:

– $f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{|h|}{h} \to \lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1$
– $f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{|h|}{h} \to \lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1$



La función no es derivable ya que $f'_-(0) = -1 \neq f'_+(0) = 1$

Definición

Diremos que una función f es derivable en un intervalo I si es derivable en todos los puntos de I, entendiendo que en los extremos puede ser derivable sólo lateralmente. Es decir, según sea el intervalo I, tendremos los siguientes casos:

– Si $I = (a,b)$, f será derivable en I cuando lo sea en todos sus puntos.
– Si $I = [a,b)$, f será derivable en I cuando sea derivable en (a,b) y derivable por la derecha en el punto a.
– Si $I = (a,b]$, f será derivable en I cuando sea derivable en (a,b) y derivable por la izquierda en el punto b.
– Si $I = [a,b]$, f será derivable en I cuando sea derivable en (a,b), derivable por la derecha en el punto a y derivable por la izquierda en el punto b.

Definición

Sea $f: I \to \mathbb{R}$ derivable. A la función real de variable real; la llamaremos función derivable en f, y la representaremos como $f'(x)$ ó $\frac{df}{dx}$; $I \to \mathbb{R}; x \sim f'(x)$

Si f es derivable en I, su derivada vuelve a ser una función en este intervalo, y puede por tanto ser derivable. En este caso llamaremos derivada segunda de f, y denotaremos como $f''(x)$ ó

$\frac{d^2f}{dx^2}$, a la función derivada de $f'(x)$. En general se define siguiendo un razonamiento inductivo de la derivada enésima de f que denotaremos por $f^{(n)}(x)$ como la derivada de $f^{(n-1)}(x)$. Se entiende que $f^{(0)} = f$.

Definición

Sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Se dice que $f \in C^n(I)$, es decir, f es de clase C^n en I, si f es n veces derivable en I y su derivada enésima es continua en el intervalo. En el caso de que $f \in C^n(I)\ \forall n \in \mathbb{N}$ se dice que $f \in C^{\infty}(I)$, es decir, que f es de clase C^{∞} en I.

Es equivalente que $f \in C^0(I)$ a que f sea continua en el intervalo I.

7.2. Fórmula de Leibniz

Sean f y g dos funciones tales que $\exists\ f^{(n)}(x_0)$ y $g^{(n)}(x_0)$ entonces $\exists\ (f \cdot g)^n(x_0)$ y $(f \cdot g)^n(x_0) =$ $= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)}(x_0)\, g^{(n-j)}(x_0)$; Hemos de notar analogía entre la fórmula de Leibniz y el binómio de Newton: $(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j}$; los números combinatorios aparecen en la fórmula de Leibniz se definen de la siguiente forma:

$$\binom{h}{j} = \frac{h!}{j!\,(n-j)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(h-j+1)}{j!}$$

7.2.1. Ejemplos

1. La fórmula de Leibniz nos puede ahorrar mucho trabajo a la hora de calcular derivadas de orden alto de funciones. Calcular la derivada n-ésima de $h(x) = x^2 e^x$

Llamamos $f(x) = x^2$ y $g(x) = e^x$

- $g^{(m)}(x) = e^x \forall\ m > 0$

- $f'(x) = 2x$
- $f''^{(x)} = 2$
- $f^{(n)}(x) = 0 \quad \forall m > 2$

Por tanto

$$h^{(n)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} f^{(j)}(x)\, g^{(j-1)}(x) = \binom{n}{0} x^2 e^x + \binom{n}{1} 2xe^x + \binom{n}{2} 2e^x =$$

$$= \left(x^2 + 2nx + n(n-1)\right)e^x$$

7.3. Propiedades de las funciones derivables

7.3.1. Teorema de Rolle

Sea $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $f(a) = f(b) \Rightarrow \exists x_0 \in (a,b)$ tal que $f'(x_0) = 0$

Corolario

Sea $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) tal que $f'(x_0) \neq 0\ \forall x_0 \in (a,b) \Rightarrow$ es inyectiva en $[a,b]$.

7.3.2. Teorema del valor medio de Lagrange

Sea $f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$, continua en $[a,b]$ y derivable en $(a,b) \Rightarrow \exists$ algún punto $x_0 \in (a,b)$ que verifica la igualdad:

$$f'^{(x_0)} = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \text{ ó } f(b)-f(a) = f'(x_0)(b-a)$$

El teorema anterior también se conoce como el Teorema de los incrementos finitos.

Proposición

Sea $f\,[a,b) \rightarrow \mathbb{R}$, continua en $[a,b)$ y derivable en (a,b) si $\exists \lim_{x\to a^+} f'(x)$ y es finito $\Rightarrow$ f es derivable por la derecha en "a":

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+} f'(x)$$

Se obtiene análogo resultado por derivadas por la izquierda.

7.3.2.1. Ejemplos

Consideremos la función:

$$f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Para estudiar su derivabilidad en $x = 0$ comenzaremos estudiando su continuidad:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x^2 = 0 \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \sin x = 0$$

Los límites laterales son iguales y coinciden con el valor de la función en 0, luego es continua. Consideremos ahora la derivada de f para $x \neq 0$.

$$f'(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si } x < 0 \\ 2x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

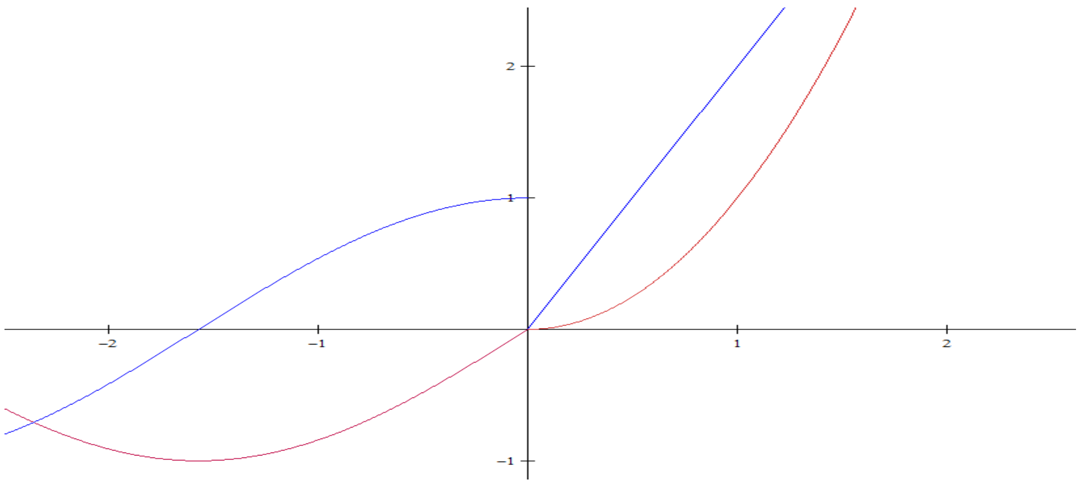
Estudiamos los límites laterales en 0 d f'

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 2x = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \cos x = 1$$

Como f es continua y $\exists \lim_{x\to 0^+} f'(x)$, según la proposición, también $\exists f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = 0$

El mismo razonamiento para el límite por la izquierda que $\exists f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1$ luego, f es derivable por la derecha y por la izquierda en 0 pero no es derivable ya que las derivadas laterales no coinciden.



Continua pero no derivable en 0

7.4. Desarrollo del polinomio de Taylor

Definición

Sea una función n veces derivable en un punto. Llamaremos polinomio de Taylor de grado n de f en el punto x_0 a:

$$P_{n,x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Definición

Llamaremos resto del polinomio de Taylor de grado n de f en x_0 a la diferencia entre la función y sus polinomios de Taylor, es decir:

$$R_{n,x_0}(x) = f(x) - P_{n,x_0}(x)$$

7.4.1. Polinomios de Taylor de grado k en $x_0 = 0$

$f(x)$	$P_{k,0}(x)$	k
e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{j=0}^{n} \frac{x^j}{j!}$	n
$\sin x$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$	$2n + 1$
$\cos x$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}$	$2n$
$\ln(1 + x)$	$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{x^j}{j}$	n
$(1 + x)^\alpha$	$1 + \alpha x + \cdots + \frac{a(\alpha - 1) \ldots + (\alpha - n + 1)}{n!} = \sum_{j=0}^{n} \binom{\alpha}{j} x^j$	n
$\frac{1}{1 - x}$	$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \sum_{j=0}^{n} x^j$	n

7.4.2. Ejemplos

1. Calculemos el polinomio de Taylor de grado 5 de e^x en $x_0 = 0$ y buscar una aproximación para el valor $x = 0{,}2$.

Termino general del polinomio de Taylor

$$\frac{f^n(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Recuerdo de factoriales

! Factorial: los naturales desde el número hasta llegar al 1

Ejemplo: $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$

Calculamos las derivadas

$$f(x) = e^x$$
$$f^I(x) = e^x$$
$$f^{II}(x) = e^x$$
$$f^{III}(x) = e^x$$
$$f^{IV}(x) = e^x$$
$$f^V(0) = e^x$$

Damos el valor

$$f(0) = 1$$
$$f^I(0) = 1$$
$$f^{II}(0) = 1$$
$$f^{III}(0) = 1$$

$f^{IV}(0) = 1$ $\qquad\qquad$ $f^{V}(0) = 1$

Por tanto el polinomio será $P_{5,0}(x) = \sum_{j=0}^{5} \frac{x^j}{j!}$

$$f(0) + f^{I}(0)(x-0) + f^{II}(0)\frac{(x-0)^2}{2!} + f^{III}(0)\frac{(x-0)^3}{3!} + f^{IV}(0)\frac{(x-0)^4}{4!} + f^{V}(0)\frac{(x-0)^5}{5!} \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} \| \text{Aproximación} \rightarrow x = 0{,}2$$

$$1 + 0{,}2 + \frac{(0{,}2)^2}{2!} + \frac{(0{,}2)^3}{3!} + \frac{(0{,}2)^4}{4!} + \frac{(0{,}2)^5}{5!} \cong \frac{458}{375}$$

2. Calculemos el polinomio de Taylor de grado 5 de $\sin x$ en $x_0 = 0$ y buscar una aproximación para el valor $x = 0{,}2$.

Calculamos las derivadas	Damos el valor
$f(x) = \sin x$	$f(0) = 0$
$f^{I}(x) = \cos x$	$f^{I}(0) = 1$
$f^{II}(x) = -\sin x$	$f^{II}(0) = 0$
$f^{III}(x) = -\cos x$	$f^{III}(0) = -1$
$f^{IV}(x) = \sin x$	$f^{IV}(0) = 0$
$f^{IV}(x) = \cos x$	$f^{IV}(0) = 1$

Por tanto el polinomio buscado será $P_{5,0}(x) = \sum_{j=0}^{5} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$

$$\underbrace{f(0)}_{0} + f^{I}(0)(x-0) + \underbrace{\frac{f^{II}(0)(x-0)^2}{2!}}_{0} + \frac{f^{III}(0)(x-0)^3}{3!} + \underbrace{\frac{f^{IV}(0)(x-0)}{4!}}_{0} + \frac{f^{V}(0)(x-0)}{5!} \rightarrow$$

$$\rightarrow x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \| \text{Aproximación} \rightarrow x = 0{,}2$$

$$0{,}2 - \frac{(0{,}2)^3}{3!} + \frac{(0{,}2)^5}{5!} \cong \frac{151}{750}$$

3. Calculemos el polinomio de Taylor de grado 5 de $\cos x$ en $x_0 = 0$ y buscar una aproximación para el valor $x = 0{,}2$.

Calculamos las derivadas	Damos el valor
$f(x) = \cos x$	$f(0) = 1$
$f^{I}(x) = -\sin x$	$f^{I}(0) = 0$
$f^{II}(x) = -\cos x$	$f^{II}(0) = -1$
$f^{III}(x) = \sin x$	$f^{III}(0) = 0$
$f^{IV}(x) = \cos x$	$f^{IV}(0) = 1$
$f^{V}(x) = -\sin x$	$f^{V}(0) = 0$

$$\text{Por tanto el polinomio buscado será } P_{5,0} = \sum_{j=0}^{5} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}$$

$$f(0) + \underbrace{f^{I}(0)(x-0)}_{0} + f^{II}(0)\frac{(x-0)^2}{2!} + \underbrace{f^{III}(0)\frac{(x-0)^3}{3!}}_{0} + f^{IV}(0)\frac{(x-0)^4}{4!} + \underbrace{f^{V}(0)\frac{(x-0)^5}{5!}}_{0} \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} \| \text{Aproximación} \rightarrow x = 0{,}2$$

$$1 - \frac{(0{,}2)^2}{2!} + \frac{(0{,}2)^4}{4!} \cong \frac{49}{50}$$

4. Calculemos el polinomio de Taylor de grado 5 de $\ln(x+1)$ en $x_0 = 0$ y buscar una aproximación para el valor $x = 0{,}2$.

Calculamos las derivadas	Damos el valor
$f(x) = \ln(x+1)$	$f(0) = 1$
$f^{I}(x) = \dfrac{1}{x+1}$	$f^{I}(0) = 1$
$f^{II}(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$	$f^{II}(0) = 1$
$f^{III}(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$	$f^{III}(0) = 2$
$f^{IV}(x) = \dfrac{-6}{(x+1)^4}$	$f^{IV}(0) = -6$
$f^{V}(x) = \dfrac{24}{(x+1)^5}$	$f^{V}(0) = 24$

$$\text{Por tanto el polinomio buscado será } P_{5,0} = \sum_{j=1}^{5} (-1)^{j+1} \frac{x^{j}}{j}$$

$$f(0) + f^{I}(0)(x-0) + f^{II}(0)\frac{(x-0)^2}{2!} + f^{III}(0)\frac{(x-0)^3}{3!} + f^{IV}(0)\frac{(x-0)^4}{4!} + f^{V}(0)\frac{(x-0)^5}{5!} \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 + x - \frac{x^2}{1\cdot 2} + \frac{2\cdot x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{2\cdot 3\cdot x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \rightarrow 1 + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} \rightarrow$$

$$\| \text{Aproximación} \rightarrow x = 0{,}2 \rightarrow 1 + (0{,}2) - \frac{(0{,}2)^2}{2} + \frac{(0{,}2)^3}{3} - \frac{(0{,}2)^4}{4} + \frac{(0{,}2)^5}{5} \cong \frac{887}{750}$$

5. Calculemos el polinomio de Taylor de grado 5 de $(1+x)^6$ en $x_0 = 0$ y buscar una aproximación para el valor $x = 0{,}2$.

Calculamos las derivadas	Damos el valor
$f(x) = (1+x)^6$	$f(0) = 1$
$f^{I}(x) = 6(1+x)^5$	$f^{I}(0) = 6$
$f^{II}(x) = 30(1+x)^4$	$f^{II}(0) = 30$
$f^{III}(x) = 120(1+x)^3$	$f^{III}(0) = 120$
$f^{IV}(x) = 360(1+x)^2$	$f^{IV}(0) = 360$
$f^{V}(x) = 720(1+x)$	$f^{V}(0) = 720$

$$\text{Por tanto el polinomio buscado será } \sum_{j=0}^{6} \binom{6}{j} x^j$$

$$f(0) + f^I(0)(x-0) + f^{II}(0)\frac{(x-0)^2}{2!} + f^{III}(0)\frac{(x-0)^3}{3!} + f^{IV}(0)\frac{(x-0)^4}{4!} + f^V(0)\frac{(x-0)^5}{5!} \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 + 6x + \frac{2\cdot 3\cdot 5x^2}{1\cdot 2} + \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 5x^5}{1\cdot 2\cdot 2\cdot 4\cdot 5} \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 + 6x + 15x^2 + 20x^3 + 15x^4 + 6x^5 \| \text{Aproximación} \rightarrow x = 0{,}2$$

$$1 + 6(0{,}2) + 15(0{,}2)^2 + 20(0{,}2)^3 + 15(0{,}2)^4 + 6(0{,}2)^5 \cong \frac{373}{125}$$

6. Calculemos el polinomio de Taylor de grado 5 de $\frac{1}{1-x}$ en $x_0 = 0$ y buscar una aproximación para el valor $x = 0{,}2$.

Calculamos las derivadas

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$
$$f^I(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$
$$f^{II}(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$
$$f^{III}(x) = \frac{6}{(1-x)^4}$$
$$f^{IV}(x) = \frac{24}{(1-x)^5}$$
$$f^V(x) = \frac{120}{(1-x)^6}$$

Damos el valor

$$f(x) = 1$$
$$f^I(x) = 1$$
$$f^{II}(x) = 2$$
$$f^{III}(x) = 6$$
$$f^{IV}(x) = 24$$
$$f^V(x) = 120$$

$$\text{Por tanto el polinomio buscado será } \sum_{j=0}^{5} x^j$$

$$f(0) + f^I(0)(x-0) + f^{II}(0)\frac{(x-0)^2}{2!} + f^{III}(0)\frac{(x-0)^3}{3!} + f^{IV}(0)\frac{(x-0)^4}{4!} + f^V(0)\frac{(x-0)^5}{5!} \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 + x + \frac{2x^2}{1\cdot 2} + \frac{2\cdot 3x^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{2\cdot 3\cdot 4x^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5x^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} \rightarrow 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 \rightarrow$$

$$\rightarrow \|\text{Aproximación} \rightarrow x = 0{,}2 \rightarrow 1 + (0{,}2) + (0{,}2)^2 + (0{,}2)^3 + (0{,}2)^4 + (0{,}2)^5 \cong \frac{3906}{3125}$$

7.5. Teorema del resto de Lagrange

Sea I un intervalo, sea $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ y sean $x, x_0 \in I$ dos puntos distintos. Llamaremos I_1 al intervalo cerrado comprendido entre x y x_0 ($[x, x_0]$ si $x < x_0$ ó $[x_0, x]$ si $x > x_0$) e I_2 al correspondiente intervalo abierto. Supongamos que $f \in C^n(I_1)$ y que $\exists\, f^{(n+1)}$ en $I_2 \Rightarrow \exists\, \theta(x) \in I_2$ tal que:

$$R_{n,x_0}(x) = f^{(n+1)}(\theta(x))\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

7.5.1. Ejemplos

La forma de Lagrange del resto podemos utilizarla para acotar el error cometido en la aproximación que hacíamos en los ejemplos de Taylor.

1. Según el 1er ejemplo de 7.4.1. aproximábamos el valor de $e^{0,2}$ utilizando el polinomio de Taylor de grado 5 de $f(x) = e^x$ en $x_0 = 0$.

Según el teorema tendremos que $\exists\ \theta(x) \in (0, x)$

$$f(x) - P_{5,0}(x) = R_{5,0}(x) =$$
$$= f^{(6)}\big(\theta(x)\big)\frac{x^6}{6!} = e^{(\theta(x))}\frac{x^6}{6!}$$

En particular

$$e^{0,2} - \frac{458}{375} = f(0,2) - P_{5,0}(0,2) =$$
$$= e^{(\theta(0,2))}\left(\frac{0,2^6}{6!}\right)$$

Acotando tenemos

$$\left|e^{0,2} - \frac{458}{375}\right| = \left|e^{(\theta(0,2))}\left(\frac{0,2^6}{6!}\right)\right| \le \frac{0,2^6}{6!} = \frac{1}{1875000}$$

Por tanto el error que se comete al aproximar $e^{0,2}$ por $\frac{458}{375}$ es $e \le \frac{1}{1875000}$

2. Según el 2º ejemplo de 7.4.1. aproximábamos el valor de $\sin 0,2$ utilizando el polinomio de Taylor de grado 5 de $f(x) = \sin x$ en $x_0 = 0$.

Según el teorema tendremos que $\exists\ \theta(x) \in (0, x)$

$$f(x) - P_{5,0}(x) = R_{5,0}(x) = f^{(6)}\big(\theta(x)\big)\frac{x^6}{6!} = sin\big(\theta(x)\big)\frac{x^6}{6!}$$

En particular

$$\sin(0,2) - \frac{151}{750} = f(0,2) - P_{5,0}(0,2) = \sin\big(\theta(x)\big)\left(\frac{0,2^6}{6!}\right)$$

Acotando tenemos

$$\left|\sin(0,2) - \frac{151}{750}\right| = \left|\sin\big(\theta(0,2)\big)\left(\frac{0,2^6}{6!}\right)\right| \le \frac{0,2^6}{6!} = \frac{1}{1875000}$$

Por tanto el error que se comete al aproximar $\sin 0,2$ por $\frac{151}{750}$ es $e \le \frac{1}{1875000}$

3. Según el 3er ejemplo de 7.4.1. aproximábamos el valor de $\cos 0,2$ utilizando el polinomio de Taylor de grado 5 de $f(x) = \cos x$ en $x_0 = 0$.

Según el teorema tendremos que $\exists\ \theta(x) \in (0, x)$

$$f(x) - P_{5,0}(x) = R_{5,0}(x) = f^{(6)}\big(\theta(x)\big)\frac{x^6}{6!} = \cos\big(\theta(x)\big)\frac{x^6}{6!}$$

En particular

$$\cos(0,2) - \frac{49}{50} = f(0,2) - P_{5,0}(0,2) = \cos\big(\theta(x)\big)\left(\frac{0,2^6}{6!}\right)$$

Acotando tenemos

$$\left|\cos(0,2) - \frac{49}{50}\right| = \left|\cos\big(\theta(0,2)\big)\left(\frac{0,2^6}{6!}\right)\right| \le \frac{0,2^6}{6!} = \frac{1}{1875000}$$

Por tanto el error que se comete al aproximar $\cos 0,2$ por $\frac{49}{50}$ es $e \le \frac{1}{1875000}$

4. Según el 4º ejemplo de 7.4.1. aproximábamos el valor de $\ln 1{,}2$ utilizando el polinomio de Taylor de grado 5 de $f(x) = \ln(1+x)$ en $x_0 = 0$.

Según el teorema tendremos que $\exists\ \theta(x) \in (0,x)$

$$f(x) - P_{5,0}(x) = R_{5,0}(x) = f^{(6)}(\theta(x))\frac{x^6}{6} = \ln(1+\theta(x))\frac{x^6}{6}$$

En particular

$$\ln(1{,}2) - \frac{887}{750} = f(0{,}2) - P_{5,0}(0{,}2) = \ln(1+\theta(0{,}2))\left(\frac{0{,}2^6}{6}\right)$$

Acotando tenemos

$$\left|\ln(1{,}2) - \frac{887}{750}\right| = \left|\ln(1+\theta(0{,}2))\left(\frac{0{,}2^6}{6}\right)\right| \le \frac{0{,}2^6}{6} = \frac{1}{93750}$$

Por tanto el error que se comete al aproximar $\cos 0{,}2$ por $\frac{887}{750}$ es $e \le \frac{1}{93750}$

5. Según el 5º ejemplo de 7.4.1. aproximábamos el valor de $(1{,}2)^6$ utilizando el polinomio de Taylor de grado 5 de $f(x) = (1+x)^6$ en $x_0 = 0$.

Según el teorema tendremos que $\exists\ \theta(x) \in (0,x)$

$$f(x) - P_{5,0}(x) = R_{5,0}(x) = f^{(6)}(\theta(x))x^6 = (1+\theta(x))^6\, x^6$$

En particular

$$(1{,}2)^6 - \frac{373}{125} = f(0{,}2) - P_{5,0}(0{,}2) = (1+\theta(0{,}2))^6(0{,}2^6)$$

Acotando tenemos

$$\left|(1{,}2)^6 - \frac{373}{125}\right| = \left|(1+\theta(0{,}2))^6(0{,}2^6)\right| \le (0{,}2^6) = \frac{1}{15625}$$

Por tanto el error que se comete al aproximar $(1{,}2)^6$ por $\frac{373}{125}$ es $e \le \frac{1}{15625}$

6. Según el 6º ejemplo de 7.4.1. aproximábamos el valor de $\frac{1}{0{,}8}$ utilizando el polinomio de Taylor de grado 5 de $f(x) = \frac{1}{1-x}$ en $x_0 = 0$.

Según el teorema tendremos que $\exists\ \theta(x) \in (0,x)$

$$f(x) - P_{5,0}(x) = R_{5,0}(x) = $$
$$= f^{(6)}(\theta(x))x^6 = \left(\frac{1}{1-\theta(x)}\right)x^6$$

En particular

$$\frac{1}{1-0{,}2} - \frac{3906}{3125} = f(0{,}2) - P_{5,0}(0{,}2) =$$
$$= \left(\frac{1}{1-\theta(0{,}2)}\right)(0{,}2^6)$$

Acotando tenemos

$$\left|\frac{1}{0{,}8} - \frac{3906}{3125}\right| = \left|\left(\frac{1}{1-\theta(0{,}2)}\right)(0{,}2^6)\right| \le (0{,}2^6) = \frac{1}{15625}$$

Por tanto el error que se comete al aproximar $\frac{1}{0{,}8}$ por $\frac{3906}{3125}$ es $e \le \frac{1}{15625}$

Proposición

Sea f una función n veces derivable en $x_0 \Rightarrow P_{n,x_0}$ es el único polinomio de grado menor o igual que n que verifica las $n+1$ propiedades.

$$f(x_0) = P_{n,x_0}(x_0), f^{I}(x_0) = P^{I}{}_{n,x_0}(x_0), \cdots, f^{(n)}(x_0) = P^{(n)}{}_{n,x_0}(x_0)$$

Definición

Sean f y g dos funciones definidas en un entorno de x_0. Se dice que $f = 0(g)$en x_0, es decir, f es una 0 grande de g en x_0, si $\exists$ u, un entorno y una constante $M > 0$ tal que

$$|f(x)| \le M|g(x)| \ \forall x \in u$$

Su principal función se encuentra en su uso con monomios del tipo $(x - x_0)^n$

Proposición

Sean f y g funciones definidas en un entorno de x_0. Se verifican las siguientes propiedades, todas ellos en el punto x_0.

- $f = 0((x-x_0)^n) \to f = 0\left((x-x_0)^k\right) \ \forall k < n$
- $f = 0((x-x_0)^n)$ y $g = 0((x-x_0)^n) \nRightarrow f = g$
- Si $n \le m, f = 0((x-x_0)^n)$ y $g = 0((x-x_0)^m) \Rightarrow f + g = 0((x-x_0)^n)$
- $f = 0((x-x_0)^n) \Rightarrow \lambda \cdot f = 0((x-x_0)^n), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \lambda \neq 0$
- $f = 0((x-x_0)^n)$ y $g = 0((x-x_0)^m) \Rightarrow f \cdot g = 0((x-x_0)^{n+m})$
- $f = 0((x-x_0)^n) \Rightarrow (x-x_0)^k f = 0\left((x-x_0)^{n+k}\right) \forall \ k \in \mathbb{N}$
- Si $n > k > 0, f = 0((x-x_0)^n) \Rightarrow f/(x-x_0)^k = 0\left((x-x_0)^{n-k}\right)$

La forma de recordar las propiedades anteriores es considerar que si $f = 0((x-x_0)^n) \Rightarrow$ f se comporta como un polinomio escrito en potencias de $(x - x_0)$ cuyo término de menor grado es de la forma $A(x-x_0)^n$.

Proposición

Sea f una función de clase C^{n+1} en un entorno de $x_0 \Rightarrow P_{n,x_0}(x)$ es el único polinomio de grado menor o igual que n se verifica.

$$f(x) - P_{n,x_0}(x) = 0(\theta(x-x_0)^{n+1}) \text{ en } x_0$$

Muchas de las técnicas para el cálculo de polinomios de Taylor se basan en el resultado anterior. Según este resultado si encontrásemos un polinomio $P \le n$ que verifique que:

$$f(x) = P(x) + 0((x-x_0)^{n+1}) \Rightarrow P \text{ es el polinomio de Taylor de f de grado n en } x_0$$

7.6. Calculo del polinomio de Taylor

Sean $P(x)$y $Q(x)$ los polinomios de Taylor de grado n en x_0 de f y g. Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow$ el polinomio de Taylor de grado n en x_0 de $\lambda f + \mu g$ es $\lambda P(x) + \mu Q(x)$

Proposición

Sea $P(x)$ el polinomio de Taylor de grado n en x_0 de f y g. Sean $\lambda, \mu \in \mathbb{R} \Rightarrow$ el polinomio de Taylor de grado n en x_0 de f·g es el resultado de eliminar del producto $P(x) \cdot Q(x)$ los términos de la forma $C_k(x-x_0)^k$ con $k > n$.

Proposición

Sea $P(g)$el polinomio de Taylor de grado n en $x_0 = 0$ de $f(y + x_0) \Rightarrow P(x - x_0)$ es el polinomio de Taylor de grado n en $x_0$de $f(x)$.

Esta proposición nos sirve para poder utilizar los desarrollos de la tabla para un $x_0 \neq 0$ ya que estos están para $x_0 = 0$. Hacemos el cambio por $y_0 = 0$ y deshacemos el cambio (ver ejemplos a partir de 3 en 7.6.1 Ejemplos)

Proposición

Si $P(x)$ es el polinomio de Taylor de grado n en $x_0 = 0\ de\ f \Rightarrow P(ax^k)$ es el polinomio de Taylor de grado nk en $x_0 = 0$ de $f(ax^k)$.

Proposición

Si $P(x)$ es el polinomio de Taylor de grado n en $x_0\ de\ f \Rightarrow$ el polinomio de Taylor de grado

$$n+1\ en\ x_0\ de\ \int_{x_0}^{x} f(\lambda)\,dt\ es\ P_{n+1,x_0}(x) = \int_{x_0}^{x} f(\lambda)\,dt$$

7.6.1. Ejemplos

1. Calcula el polinomio de Taylor de grado 4 en $x_0 = 0$ de la función $f(x) = 2\sin x - \frac{3}{1-x}$

Sabemos que la expresión del seno es

$$x - \frac{x^3}{3!}$$

y de $\frac{1}{1-x}$ es

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4$$

Por tanto el polinomio de f será:

$$P_{4,0}(x) = 2\left(x - \frac{x^3}{3!}\right) - 3(1 + x + x^2 + x^3 + x^4) \to 2x - \frac{x^3}{3} - 3 - 3x - 3x^2 - 3x^3 - 3x^4 \to$$

$$\to -3 - x - 3x^2 - \frac{10x^3}{3} - 3x^4$$

2. Calcule el polinomio de Taylor de grado 3 en $x_0 = 0$ de la función $f(x) = \frac{\sin x}{1-x}$

Sabemos que la expresión del seno es

$$x - \frac{x^3}{3!}$$

y de $\frac{1}{1-x}$ es

$$1 + x + x^2 + x^3$$

Por tanto el polinomio de f será:

$$P_{3,0}(x) = \left(x - \frac{x^3}{3!}\right) \cdot (1 + x + x^2 + x^3) = x + x^2 + \frac{5x^3}{6} + \frac{5x^4}{6} - \frac{x^5}{6} - \frac{x^6}{6}$$

Eliminando los términos de grado mayor que 3, obtenemos el polinomio de f:

$$P_{3,0}(x) = x + x^2 + \frac{5x^3}{6}$$

3. Calcule el polinomio de Taylor de grado 5 en $x_0 = 0$ de la función $g(x) = x^2 \sin x$

Sabemos que la expresión del seno es

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

Por tanto el polinomio de f será:

$$P_{3,0}(x) = x^2\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}\right) \xrightarrow{\text{mult}} \left(x^3 - \frac{x^5}{3!} + \frac{x^7}{5!}\right)$$

Eliminando el término de grado mayor a 5, obtenemos el polinomio de f:

$x^3 - \frac{x^5}{3!} \to$ Si tomamos $Q(x) \to g(x) = Q(x) + 0(x^6)$ y por la proposición anterior Q es el polinomio de Taylor de grado 5 de g en $x_0 = 0$.

4. Calcule el polinomio de Taylor de grado 3 de $\ln x \; en \; x_0 = 1$

Procedemos al cambio de variable $y = x - 1 \rightarrow y + 1 = x$ Así, hemos de calcular el polinomio de Taylor de grado 3 de $\ln(1 + y)$ en $y_0 = 0$
Sabemos que la expresión de $\ln(1 + y)$ es

$$1 + y - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3}$$

Deshaciendo el cambio, obtenemos el polinomio de Taylor de grado 3 de $\ln x$ en $x_0 = 1$

$$P(x) = (x - 1) - \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(x-1)^3}{3}$$

5. Calcule el polinomio de Taylor de grado 4 en $x_0 = 2$ de la función $f(x) = xe^x$

Procedemos al cambio de variable $y = x - 2 \rightarrow y + 2 = x$ Así calculamos el polinomio de Taylor de grado 4 en $y_0 = 0$ de $g(y) = (y + 2)e^{y+2} \rightarrow e^2(y + 2)e^y$
Sabemos que la expresión de $e^y \; es$

$$1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!}$$

Por tanto el polinomio de f será:

$$P_{4,0}(y) = e^2(y + 2)\left(1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{6} + \frac{y^4}{24}\right) \rightarrow 2e^2 + 3ye^2 + 2y^2e^2 + \frac{5y^3}{6}e^2 + \frac{1y^4}{4}e^2 + \frac{y^5}{24}e^2$$

Eliminando el término de grado mayor que 4 obtenemos el polinomio de g

$$2e^2 + 3ye^2 + 2y^2e^2 + \frac{5y^3}{6}e^2 + \frac{1y^4}{4}e^2$$

Deshaciendo el cambio

$$P_{4,0}(y) = 2e^2 + 3(x-2)e^2 + 2(x-2)^2e^2 + \frac{5(x-2)^3}{6}e^2 + \frac{1(x-2)^4}{4}e^2$$

8. Estudio de funciones

1. Dominio

Son los posibles valores que puede tomar la variable x

- Funciones polinómicas: $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R}$
- Funciones racionales: $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{\text{valores que anulan el denominador}\}$
- Funciones irracionales: $\mathrm{Dom}\, f = \{\text{valores que hacen el radicando } \geq 0\}$
- Funciones logarítmicas: $\mathrm{Dom}\, f = \{\text{valores que lo hacen } > 0\}$
- Funciones exponenciales: $\mathrm{Dom}\, f =$ dominio del exponente

2. Puntos de corte

- Corte $0x \rightarrow y = 0\,; x\,?$
- Corte $0y \rightarrow x = 0\,; y\,?$

3. Regiones

Consiste en estudiar el signo de la función. Para ello, colocamos el dominio y los puntos de corte con el eje x, si los hay, en los intervalos en los que el signo es positivo, el dibujo queda por encima del eje x, y si es negativo, por debajo.

4. Simetría

- Par $\rightarrow f(x) = f(-x)$
- Impar $\rightarrow f(-x) = -f(x)$

5. Asíntotas

- A. vertical $\lim_{x \to a} f(x) = \mp\infty \Rightarrow x = a$ es AV
- A. horizontal $\lim_{x \to \mp\infty} f(x) = k \Rightarrow y = k$ es AH
- A. oblicua $y = mx + n$ donde $m = \lim_{x \to \mp\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \to \mp\infty} (f(x) - mx)$ cuando hay asíntota horizontal, ya no hay oblicua

6. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

Consiste en estudiar el signo de f'. Para ello, la calculamos, igualamos a cero y resolvemos. Los valores obtenidos se llaman puntos críticos, y son los candidatos a máximos o mínimos. A continuación colocamos el dominio y los puntos críticos. En los intervalos en los que el signo de f' sea +, la función será creciente, y cuando sea -, decreciente.
Para clasificar los puntos críticos tenemos dos opciones:

- Criterio de la 1º derivada: En aquellos puntos críticos en los que f' pasa de creciente a decreciente hay un máximo relativo, y en los que pasa de decreciente a creciente, un mínimo relativo.
- Criterio de la 2º derivada: Si al sustituir un punto crítico de f'' da una valor negativo, el punto será un máximo; y cuando da positivo, un mínimo.

7. Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión

Consiste en estudiar el signo de f''. Para ello, la calculamos igualando a cero y resolvemos, Los valores obtenidos son candidatos a puntos de inflexión. A continuación los colocamos juntos con el dominio. En los intervalos en los que el signo de f'' sea +, la función será cóncava hacia arriba, y cuando sea -, cóncava hacia abajo.
En aquellos puntos del dominio en el que haya cambios de cóncava a convexa o viceversa, tendremos un punto de inflexión.

*Los valores de las derivadas de la función se sustituyen en sus respectivas derivadas.

8.1. Ejemplos

8.1.1. Estudia la función $y = \frac{x^3}{x^2-1}$

1. Dominio

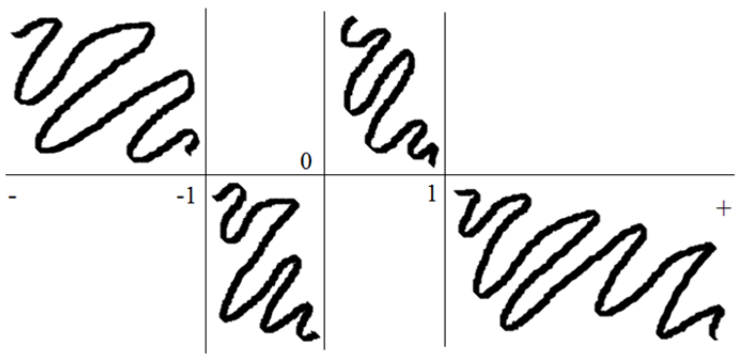
$x^2 - 1 = 0 \to x = \pm\sqrt{1} = \pm 1 \therefore \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{1, -1\}$

2. Puntos de corte

Corte 0x $\to x = 0 \Rightarrow y = \frac{0^3}{0^2-1} \to y = 0$

Corte 0y $\to y = 0 \to 0 = \frac{x^3}{x^2-1} \to x = 0$

3. Regiones



4. Simetría

$$\text{Par } f(x) = f(-x) \rightarrow \frac{x^3}{x^2-1} \neq \frac{-x^3}{x^2-1} \rightarrow \nexists \text{ simetría par}$$

$$\text{Impar } f(-x) = -f(x) \rightarrow \frac{-x^3}{x^2-1} \neq \frac{-x^3}{-x^2+1} \rightarrow \nexists \text{ simetría impar}$$

5. Asíntotas

- AH
  - $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{\infty}{\infty} \rightarrow \frac{\frac{x^3}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}-\frac{1}{x^3}} =$

    $= \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow \nexists$ A. horizontal
- AV
  - $\lim_{x\to 1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{+}{-} = -\infty$
  - $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{+}{+} = \infty$
  - $\lim_{x\to -1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-}{+} = -\infty$
  - $\lim_{x\to -1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-}{-} = \infty$
- AO

  $y = mx + n \rightarrow y = x$

  $m = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} = \frac{x^3}{x^3 - x} \rightarrow \frac{1}{1} = 1$

  $n = \lim_{x\to\mp\infty} (f(x) - mx) \rightarrow$

  $\rightarrow \frac{x^3}{x^2-1} - x \rightarrow \frac{x^3-x^3+x}{x^2-1} \rightarrow \frac{\infty}{\infty} \rightarrow 0$

6. Crecimiento y decrecimiento

- Primera derivada:

$$f'(x) = \frac{(3x^2)(x^2-1) - (x^3)(2x)}{(x^2-1)^2} \rightarrow \frac{3x^4 - 3x^2 - 2x^4}{(x^2-1)^2} = 0 \rightarrow x^2(x^2-3) = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 0; x^2 = 3 \rightarrow \begin{matrix} +\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} \end{matrix}$$

	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, -1)$	-1	$(-1,0)$	1	$(1, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, \infty)$
f’	+	0	-	∄	-	∄	-	0	+
f	↑	máx.	↓	∄	↓	∄	↓	mín.	↑

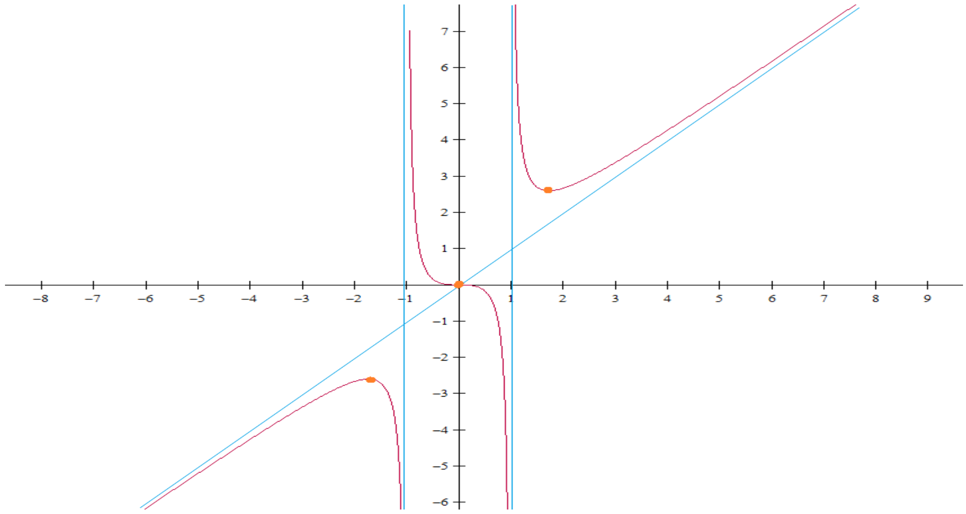
- Segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{(4x^3 - 6x)(x^2-1) - x^2(x^2-3)2(2x)}{(x^2-1)^4} \rightarrow \frac{x\left((4x^2-6)(x^2-1) - x(x^2-3)2(2x)\right)}{(x^2-1)^3} \rightarrow$$

$$\rightarrow x(2x^2+6) = 0 \rightarrow x = 0$$

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1, \infty)$
f’	-	∄	+	0	-	∄	+
f	∩	∄	∪	Pto. inflex	∩	∄	∪

7. Gráfica



8.1.2. Estudia la función $y = \frac{x^2-5x+7}{x-2}$

1. Dominio

$x - 2 = 0 \rightarrow x = 2$

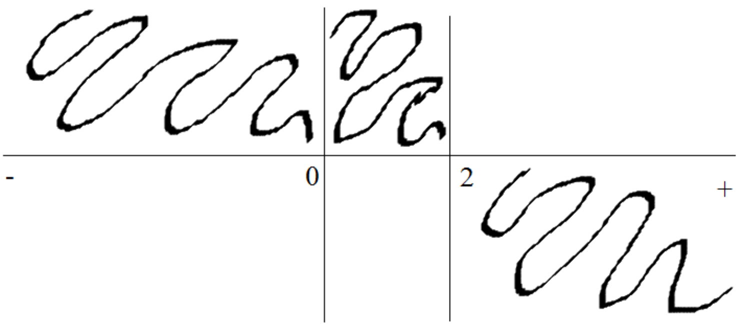
$\therefore \text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$

2. Puntos de corte

$\text{Corte0x} \rightarrow x = 0 \ \Rightarrow y = \frac{0^2-5\cdot 0+7}{0-2}; y = \frac{7}{-2};$

$\text{Corte 0y} \rightarrow y = 0 \ \Rightarrow 0 = x^2 - 5x + 7 \Rightarrow \nexists; \text{x no corta}$

3. Regiones



4. Simetría

$\text{Par} \rightarrow f(x) \neq f(-x) \ \nexists \text{ simetría par}$

$\text{Impar} \rightarrow f(-x) \neq -f(x) \ \nexists \text{ simetría impar}$

5. Asíntotas

- AH
  - $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-5x+7}{x-2} = \frac{\infty}{\infty} \overset{\text{Indeterminación}}{\widehat{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{7}{x^2}}{\frac{x-2}{x^2}} = \frac{1}{0} = \infty \Rightarrow \nexists \text{ A. horizontal}$
- AV
  - $\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2-5x+7}{x-2} = \frac{+}{-} = -\infty$
  - $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-5x+7}{x-2} = \frac{+}{+} = +\infty$

- AO

– $y = mx + n \to y = x - 3$

– $m = \lim_{x\to\mp\infty} \frac{f(x)}{x} \Rightarrow \frac{\frac{x^2-5x+7}{x-2}}{x} \to \frac{x^2-5x+7}{x^2-2x} \to \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{7}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$

– $n = \lim_{x\to\mp\infty}(f(x) - mx) \Rightarrow \frac{x^2-5x+7}{x-2} - x \to \frac{-3x+7}{x-2} = \frac{\infty}{\infty} = \frac{-3}{1} = -3$

6. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

- Primera derivada:

$$f'(x) = \frac{(2x-5)(x-2) - (x^2-5x+7)(1)}{x^2-4x+4} = \frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2} = 0 \to$$
$$\to \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4(-3)}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

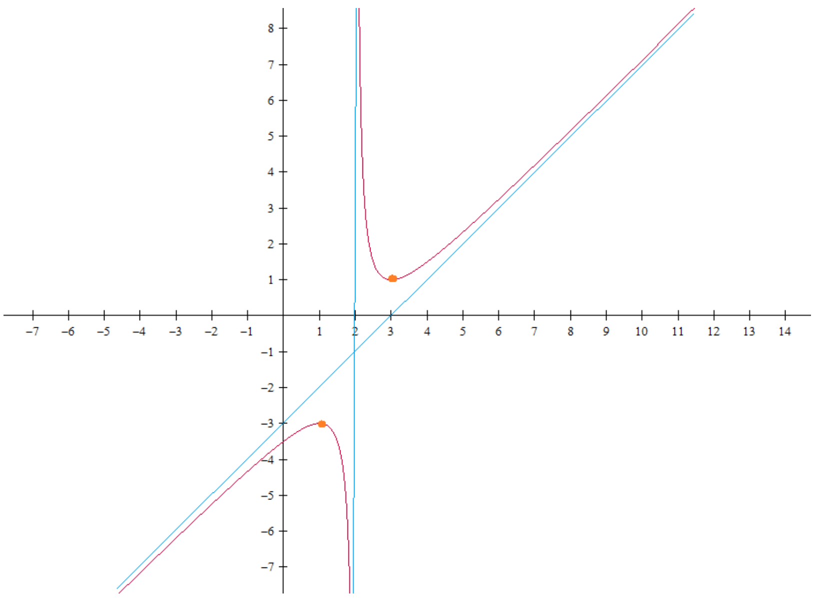
	$(-\infty,1)$	1	(1,2)	2	(2,3)	3	$(3,\infty)$
f’	+	0	-	∄	-	0	+
f	↑	máx.	↓	∄	↓	mín.	↑

- Segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - (x^2-4x+3)\cdot 2(x-2)}{((x-2)^2)^2} = y' = \frac{2}{(x-2)^3} \to 2 = 0$$

	$(-\infty,2)$	2	$(2,\infty)$
f’’	-	∄	+
f	∩	∄	∪

7. Gráfica



8.1.3. Estudia la función $y = \frac{2x}{4-x^2}$

1. Dominio

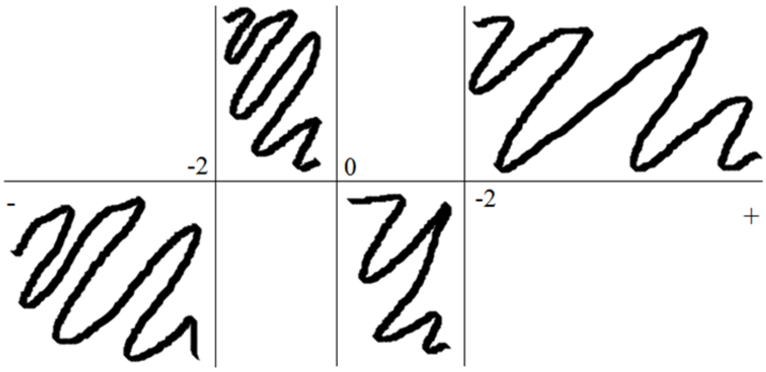
$$4 - x^2 = 0 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow$$
$$\rightarrow x = \pm 2 \therefore Dom\, f(x) = \mathbb{R} - \{-2,2\}$$

2. Puntos de corte

Corte $0x \rightarrow y = \frac{2\cdot 0}{4-0^2} \rightarrow y = 0$

Corte $0y \rightarrow 0 = \frac{2x}{4-x^2} \rightarrow x = 0$

3. Regiones



4. Simetría

$$\text{Par} \rightarrow f(x) = f(-x) \rightarrow \frac{2x}{4-x^2} \neq \frac{-2x}{4-x^2} \rightarrow \nexists \text{ simetría par}$$

$$\text{Impar} \rightarrow f(-x) = -f(x) \rightarrow \frac{-2x}{4-x^2} \neq \frac{-2x}{-4+x^2} \rightarrow \nexists \text{ simetria impar}$$

5. Asíntotas

- AH
  - $\lim_{x\rightarrow\pm\infty} \frac{2x}{4-x^2} = \frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{4}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$

- AV
  - $\lim_{x\rightarrow -2^+} \frac{2x}{4-x^2} = \frac{-\infty}{-\infty} = \infty$
  - $\lim_{x\rightarrow -2^-} \frac{2x}{4-x^2} = \frac{-\infty}{\infty} = -\infty$

No tiene asíntotas oblicuas porque tiene asíntotas horizontales

6. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

- Primera derivada:

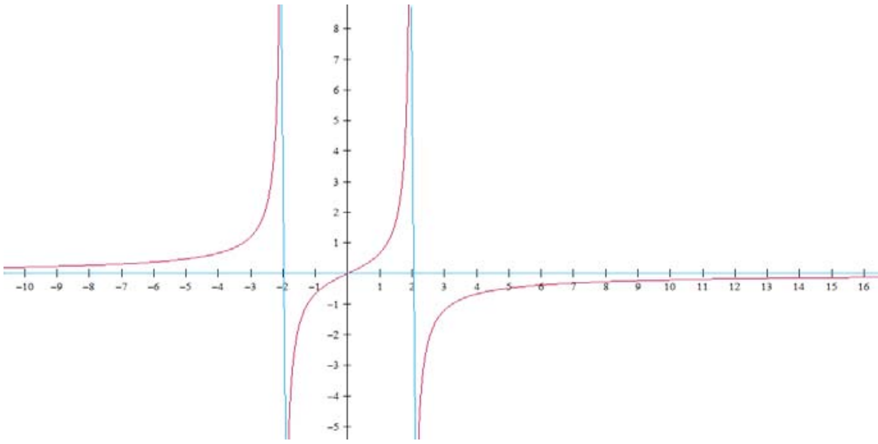
$$f'(x) = \frac{(2)(4-x^2)-(2x)(-2x)}{(4-x^2)^2} = \frac{8-2x^2+4x^2}{(4-x^2)^2} \rightarrow \frac{2x^2+8}{(4-x^2)^2} \rightarrow$$
$$\rightarrow \nexists n^{\underline{o}} \in \mathbb{R} \text{ que anule el numerador} \therefore \text{no hay máx ni mín}$$

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,2)$	2	$(2,\infty)$
f'	+	∄	+	∄	+
f	↑	∄	↑	∄	↑

- Segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{2x^2+8}{(4-x^2)^2}\to f''(x)=\frac{(4x)(4-x^2)^2-(2x^2+8)(2)(4-x^2)(-2x)}{(4-x^2)^4}=$$
$$=\frac{-4x^3+16x+8x^3+32x}{(4-x^2)^3}\to 4x^3+48x=0\to x=0$$

	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,0)$	0	$(0,2)$	2	$(2,\infty)$
f''	+	∄	-	0	+	∄	-
f	∪	∄	∩	Pto. inflex	∪	∄	∩



8.1.4. Estudia la función $y=\frac{2x^2-6x+4}{x^2+1}$

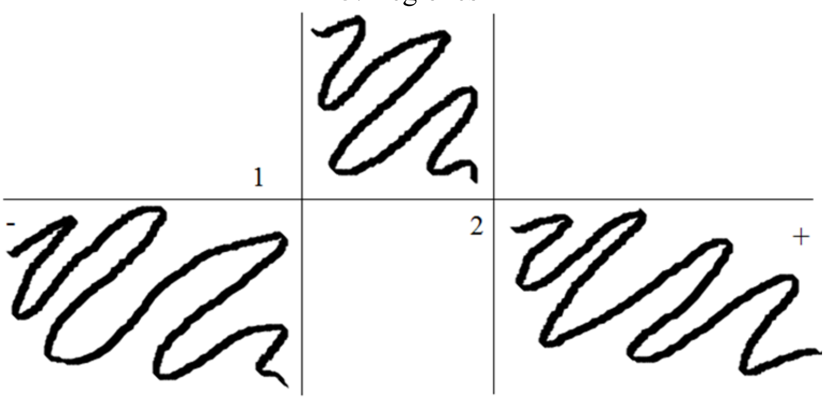
1. Dominio

$x^2+1=0\to x^2=-1\to \nexists n^{o}\in\mathbb{R}$ que anule el denominador $\therefore$ Dom f(x) $=\mathbb{R}$

2. Puntos de corte

$$0x\to x=0\to y=\frac{2\cdot 0^2-6\cdot 0+4}{0^2+1}\to y=4$$
$$0y\to y=0\to 0=\frac{2x^2-6x+4}{x^2+1}\xrightarrow{\text{ec 2º grado}}\frac{6\pm 2}{4}\to \begin{matrix}2\\1\end{matrix}$$

3. Regiones



4. Simetría

$$\text{Par} \rightarrow f(x) = f(-x) \rightarrow \frac{2x^2 - 6x + 4}{x^2 + 1} \neq \frac{2x^2 + 6x + 4}{x^2 + 1} \rightarrow \nexists \text{simetría par}$$

$$\text{Impar} \rightarrow f(-x) = -f(x) \rightarrow \frac{2x^2 + 6x + 4}{x^2 + 1} \neq \frac{-2x^2 + 6x - 4}{-x^2 - 1} \rightarrow \nexists \text{ simetría impar}$$

5. Asíntotas

- AV

No tiene asíntotas verticales

- AH

$$\lim_{x\rightarrow\pm\infty} \frac{2x^2-6x+4}{x^2+1} \rightarrow \frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{6x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = 2$$

No tiene asíntotas oblicuas

6. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

- Primera derivada:

$$f''(x) = \frac{(4x-6)(x^2+1)-(2x^2-6x+4)(2x)}{(x^2+1)^2} \rightarrow \frac{6x^2-4x-6}{(x^2+1)} = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 3x^2 - 2x - 3 = 0 \xrightarrow{\text{ec.2º grado}} \frac{2 \pm \sqrt{40}}{6} \rightarrow \begin{matrix} \frac{1+\sqrt{10}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{10}}{3} \end{matrix}$$

	$\left(-\infty, \frac{1-\sqrt{10}}{3}\right)$	$\frac{1-\sqrt{10}}{3}$	$\left(\frac{1-\sqrt{10}}{3}, \frac{1+\sqrt{10}}{3}\right)$	$\frac{1+\sqrt{10}}{3}$	$\left(\frac{1+\sqrt{10}}{3}, \infty\right)$
f'	+	0	-	0	+
f	↑	máx.	↓	mín.	↑

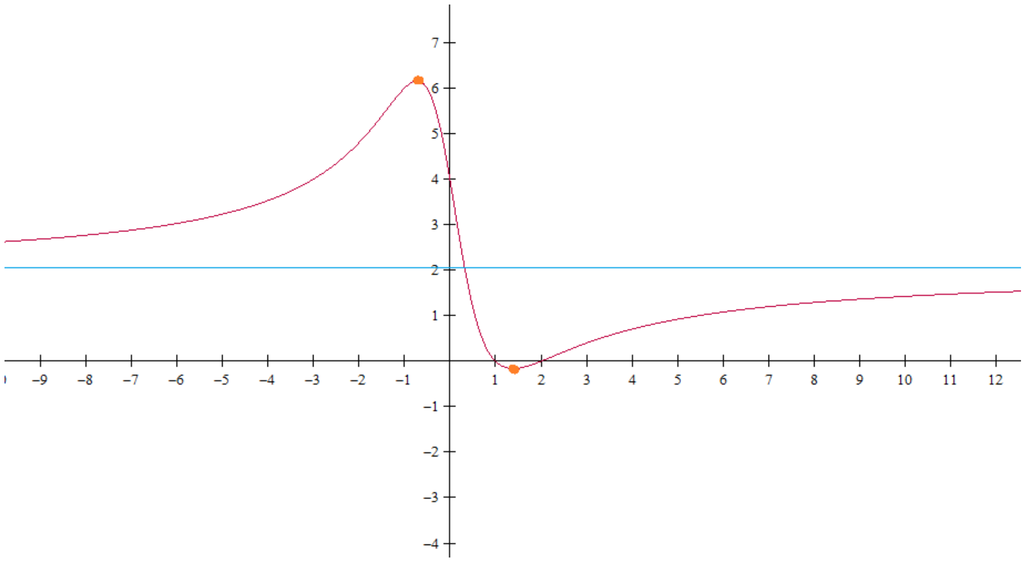
- Segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{(12x-4)(x^2+1)^2-(6x^2-4x-6)2(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-12x^3+12x^2+32x-4}{(x^2+1)^3} = 0$$

Tiene una resolución compleja pero he encontrado un intervalo en que se encuentra el punto de inflexión, al que lo denominaré tal que así: $I = (0{,}15 \sim 0{,}2)$

	$(-\infty, I)$	I	(I, ∞)
f'	-	0	+
f	∩	Pto. inflex	∪



8.1.5. Estudia la función $y=\frac{2x}{1-x^2}$

1. Dominio

$1-x^2=0\rightarrow x=\pm1\rightarrow$

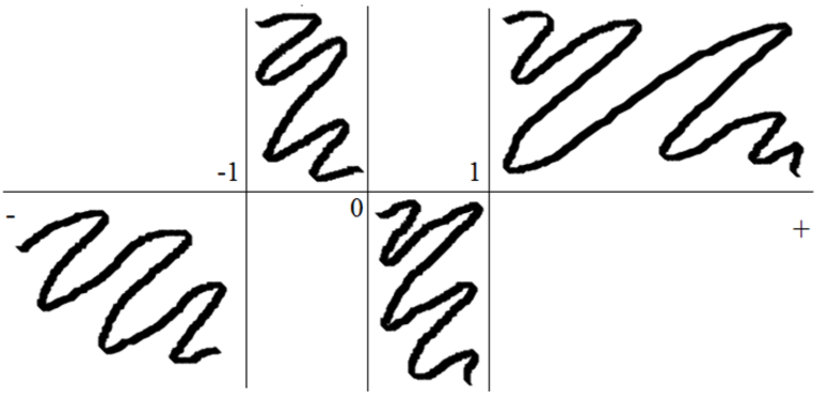
$\rightarrow \mathrm{Domf(x)}=\mathbb{R}\{-1,1\}$

2. Puntos de corte

Corte 0x $\rightarrow x=0\rightarrow y=\frac{2\cdot0}{1-0^2}\rightarrow y=0$

Corte 0y $\rightarrow y=0\rightarrow 0=\frac{2x}{1-x^2}\rightarrow x=0$

3. Regiones



4. Simetría

$$\text{Par}\rightarrow f(x)=f(-x)\rightarrow\frac{2x}{1-x^2}\neq\frac{-2x}{1-x^2}\ \nexists\ \text{simetría par}$$

$$\text{impar}\rightarrow f(-x)=-f(x)\rightarrow\frac{-2x}{1-x^2}\neq\frac{-2x}{-1+x^2}\ \nexists\ \text{simetría impar}$$

5. Asíntotas

- AV
  - $\lim_{x\to-1^+}\frac{2x}{1-x^2}=\frac{-\infty}{\infty}=-\infty$
  - $\lim_{x\to-1^-}\frac{2x}{1-x^2}=\frac{-\infty}{-\infty}=\infty$
  - $\lim_{x\to-1^+}\frac{2x}{1-x^2}=\frac{\infty}{-\infty}=-\infty$
  - $\lim_{x\to1^-}\frac{2x}{1-x^2}=\frac{\infty}{\infty}=\infty$
  -
- AH

  $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{1-x^2}\rightarrow\frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}\rightarrow\frac{0}{-1}=0$

  No hay oblicua

Jorge Cerezo Martínez
hellosoyjorge@hotmail.com

6. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

– Primera derivada:

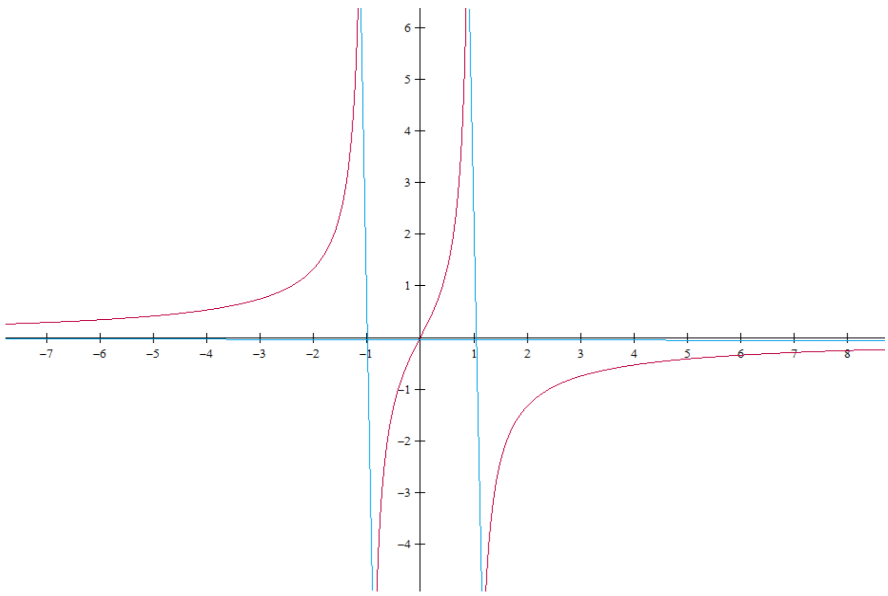
$$f'(x)=\frac{(2)(1-x^2)-(2x)(-2x)}{(1-x^2)^2}\rightarrow\frac{2+2x^2}{(1-x^2)^2}\rightarrow \nexists n^{\underline{o}} \in \text{ que lo anule}$$

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,\infty)$
f’	+	∄	+	∄	+
f	↑	∄	↑	∄	↑

– Segunda derivada:

$$f''(x)=\frac{(4x)(1-x^2)^2-(2x^2+2)2(1-x^2)(-2x)}{(1-x^2)^4}\rightarrow\frac{4x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}\rightarrow$$
$$\rightarrow 4x(x^2+3)=0\rightarrow x=0$$

	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,\infty)$
f’’	-	∄	+	0	-	∄	+
f	∩	∄	∪	Pto. inflex	∩	∄	∪



8.1.6. Estudia la función $f(x)=\frac{x^4+1}{2x^3}$

1. Dominio

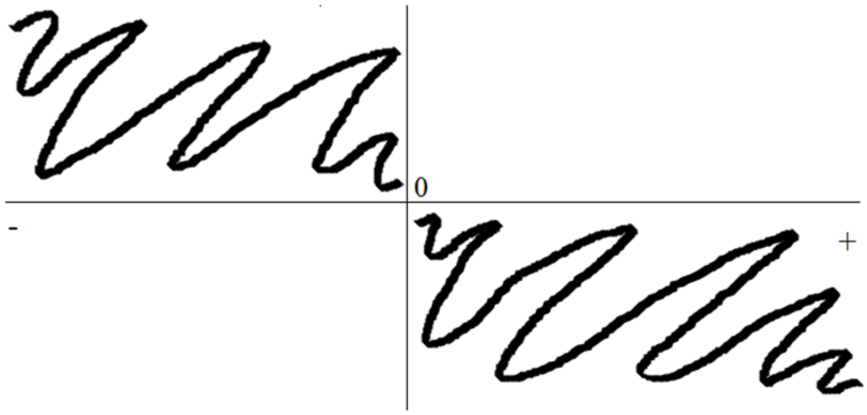
$2x^3=0\rightarrow x=0\rightarrow \text{Domf}(x)=\mathbb{R}-\{0\}$

2. Puntos de corte

$\text{Corte } 0x\rightarrow x=0\rightarrow y=\frac{0^{4+1}}{2\cdot 0^3}\rightarrow y=0$

$\text{Corte } 0y\rightarrow y=0\rightarrow 0=x^4+1\rightarrow \nexists\, x$

3. Regiones



4. Simetría

$$\text{par} \rightarrow f(x) = f(-x) \rightarrow \frac{x^4+1}{2x^3} \neq \frac{x^4+1}{-2x^3} \nexists \text{ simetría par}$$

$$\text{impar} \rightarrow f(-x) = -f(x) \rightarrow \frac{x^4+1}{-2x^3} = \frac{-x^4-1}{-2x^3} \nexists \text{ simetría impar}$$

5. Asíntotas

- AV
  - $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^4+1}{2x^3} = \frac{+\infty}{-\infty} \rightarrow -\infty$
  - $\lim_{x\to 0^-} \frac{x^4+1}{2x^3} = \frac{+\infty}{+\infty} \rightarrow \infty$
- AH
  - $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^4+1}{2x^3} \rightarrow \frac{\frac{x^4}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{2x^3}{x^4}} \rightarrow \frac{1}{0} = \infty$
- AO
  - $y = mx - n \rightarrow y = \frac{1}{2}x$
  - $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \rightarrow \frac{x^4+1}{2x^4} \rightarrow$

    $\rightarrow \frac{\frac{x^4}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{2x^4}{x^4}} \rightarrow \frac{1}{2}$
  - $n = \lim_{x\to\pm}(f(x) - mx) \rightarrow$

    $\rightarrow \frac{x^4+1}{2x^4} - \frac{x}{2} \rightarrow \frac{x^4+1-x^4}{2x^3} = 0$

6. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

- Primer derivada:

$$y' = \frac{(4x^3)(2x^3) - (x^4+1)(6x^2)}{(2x^3)^2} \rightarrow \frac{(4x^3)(x) - (x^4+1)(3)}{2x^6} \rightarrow \frac{4x^3 - 3x^3 - 3}{2x^4} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{x^4-3}{2x^4} = 0 \rightarrow x^4 - 3 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt[4]{3}$$

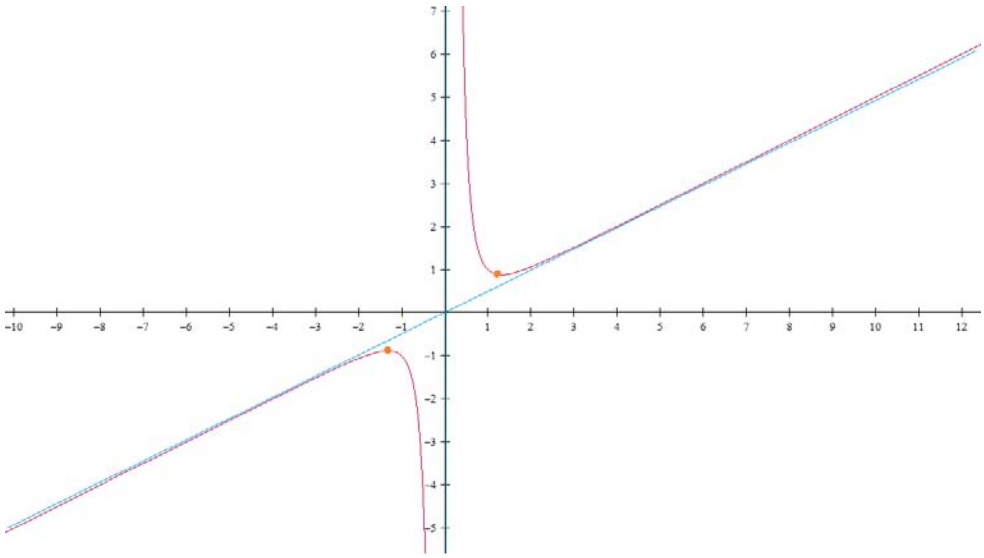
	$(-\infty, -\sqrt[4]{3})$	$-\sqrt[4]{3}$	$(-\sqrt[4]{3}, 0)$	0	$(0, \sqrt[4]{3})$	$\sqrt[4]{3}$	$(\sqrt[4]{3}, \infty)$
f’	+	0	-	∄	-	0	+
f	↑	máx.	↓	∄	↓	mín.	↑

- Segunda derivada:

$$y'' = \frac{x^4+3}{2x^4} \rightarrow \frac{(4x^3)(2x^4) - (x^4+3)(8x^3)}{(2x^4)^2} \rightarrow \frac{(4x^3)(x) - (x^4+3)(4)}{2x^5} \rightarrow \frac{4x^4 - 4x^4 + 3}{2x^5} \rightarrow \nexists$$

	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
f’	-	∄	+
f	∩	∄	∪

7. Gráfica



8.1.7. Ejercicio. Estudia la función $f(x) = \frac{2x^2-3}{5}$

1. Dominio

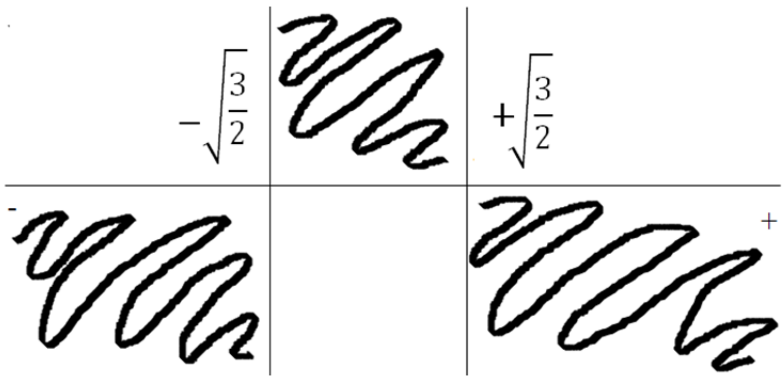
$5 = 0 \rightarrow \nexists n^{o} \in \mathbb{R}$ que anule al denominador $\therefore$ Dom $f(x) = \mathbb{R}$

2. Puntos de corte

Corte $0x \rightarrow x = 0 \rightarrow y = \frac{2 \cdot 0^2 - 3}{5} \rightarrow$
$\rightarrow y = \frac{-3}{5}$

Corte $0y \rightarrow y = 0 \rightarrow 0 = \frac{2x^2-3}{5} \rightarrow \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$

3. Regiones



4. Simetría

$$\text{Par} \rightarrow f(x) = f(-x) \rightarrow \frac{2x^2-3}{5} = \frac{2x^2-3}{5} \rightarrow \text{tiene simetría par}$$

5. Asíntotas

- AV

No tiene asíntotas verticales

- AH

– $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2-3}{5} = \infty \rightarrow$ no tiene asíntota horizontal

- AO

– $y = mx + n$

– $m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} \rightarrow \frac{2x^2-3}{5x} =$

$= \infty$ no tiene asíntota oblicua

6. Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos

– Primera derivada:

$$y' = \frac{(4x)(5) - (2x^2 - 3)(0)}{5^2} \rightarrow \frac{4x}{5} = 0 \rightarrow x = 0$$

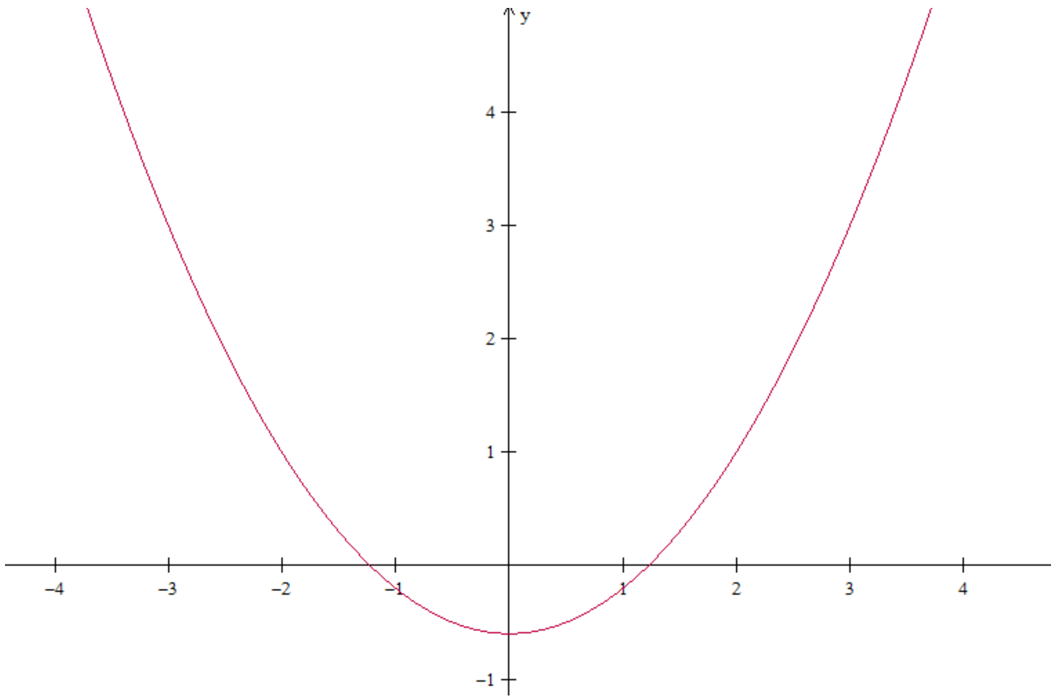
	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
f’	-	0	+
f	↓	mín.	↑

– Segunda derivada:

$$y'' = \frac{4x}{5} \rightarrow y'' = \frac{(4)(5) - (4x)(0)}{5^2} \rightarrow 20 = 0 \rightarrow \nexists \text{ punto de inflexión}$$

	$(-\infty, \infty)$
f’	+
f	∪

7. Gráfica



9. Cálculo integral de funciones de una variable

9.1 La integral de Riemann

La idea de integral de una función es la idea del área bajo una curva

Definición

Llamaremos partición de un intervalo $[a, b]$ a cualquier conjunto ordenado de puntos $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ que verifique $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.

Definición

Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada en $[a, b]$ y sea $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ una partición de $[a, b]$.

- Llamaremos suma inferior de f correspondiente a P a:

$$s(f, p) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \text{ donde } m_i = \inf\{f(x)/x \in [x_i - x_{i-1}]\}$$

- Llamaremos suma superior de f correspondiente a P a:

$$S(f, p) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \text{ donde } m_i = \sup\{f(x)/x \in [x_i - x_{i-1}]\}$$

$$s(f, p) \leq S(f, p)$$

Definición

Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada en $[a, b]$. Diremos que f es integrable en el sentido de Riemann en $[a, b]$ si su integral inferior coincide con su integral superior. En el caso en el que sea f integrable, llamaremos integral de f en $[a, b]$ al valor de dichas integrales (superior e inferior) y las denotaremos por $\int_a^b f$ ó $\int_a^b f(x)\, dx$. Al punto a se le llama límite inferior de integración y al punto b límite superior de integración.

Proposición

Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada en $[a, b]$ si f es continua en $[a, b]$ salvo en un número finito de puntos $\Rightarrow$ f es integrable en $[a, b]$. La mayoría de las funciones acotadas que se utilizan son integrables.

9.2. Propiedades de una integral

Proposición

Sea $k \in \mathbb{R} \Rightarrow \int_a^b k\,dx = k(b - a)$.

Proposición

Sean f y g funciones integrables en $[a, b] \Rightarrow$: $\lambda f + \mu g$ es integrable en $[a, b]\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y $\int_a^b \big(\lambda f(x)\big) + \big(\mu g(x)\big) dx = \lambda \int_a^b f(x) dx + \mu \int_a^b g(x)\, dx$.

9.2.1. Ejemplos

1. $\int_1^2 \frac{1}{2} x^2 + 3x^3 dx = \frac{1}{2} \int_1^2 x^2\, dx + 3 \int_1^2 x^3$
2. $\int_1^0 \frac{7}{5} \cos x - \frac{6}{7} \sin x\, dx = \frac{7}{5} \int_1^0 \cos x\, dx - \int_1^0 \frac{6}{7} \sin x\, dx$

Proposición

Sea f integrable en $[a, b]$ si $f(x) = g(x)$ para cualquier x de $[a, b]$ salvo para un número finito de puntos $\Rightarrow$ g es integrable en $[a, b]$ y $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

Proposición

Sean f y g integrables en $[a, b]$ si $f(x) \leq g(x)$ para cualquier x de $[a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$. Es suficiente con que la desigualdad se verifique salvo en un número finito de puntos en el intervalo.

Proposición

Si f es integrable en $[a, b] \Rightarrow |f|$ es integrable en $[a, b]$ y además $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$.

Definición

Se define integral entre a y a de la función f como: $\int_a^a f(x)dx = 0$

Definición

Se define integral entre b y a de la función f para $b > a$ como $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

9.3. Teorema del valor medio para integrales

Si f es continua en el intervalo $[a, b] \Rightarrow \exists$ en un punto ε en $[a, b]$ tal que $f(\varepsilon) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Teorema

Si f es integrable en $[a, b] \Rightarrow$ la función definida en $[a, b]$ por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es continua en $[a, b]$.

9.4. Teorema fundamental del cálculo

Sea f integrable en $[a, b]$ y sea $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, si f es continua en el punto $x_0 \in [a, b] \Rightarrow$ F es derivable en x_0 y $F'(x_0) = f(x_0)$.

Corolario

Si f es en $[a, b] \Rightarrow \frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x), \frac{d}{dx}\int_x^b f(t)dt = -f(x)$. Además, si g y h son funciones Derivables tales que $g(x) \in [a, b]$ y $h(x) \in [a, b] \Rightarrow \frac{d}{dx}\int_{g(x)}^{h(x)} f(t)dt = f(h(x))h'(x) - f(g(x))g'(x)$.

Definición

Sean f y G dos funciones definidas en un intervalo I. Diremos que G es una primitiva de f en I si se verifica que: $G'(x) = f(x)\forall x \in I$.

La primitiva de la función f, también denominada integral indefinida de f, se suele denotar Como: $\int f(x)\,dx$. Si G es una primitiva de f $\Rightarrow$ cualquier primitiva de f será de la forma: $\int f(x)dx = G(x) + C$ con $C \in \mathbb{R}$.

9.4.1. Regla de Barrow

Sea f integrable en [a, b] y sea G una primitiva de f en [a, b] $\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = G(x)|_a^b = G(b) - G(a)$

9.4.1.1. Ejemplos

1. $\int_0^1 e^x dx$

$$\int_0^1 e^x dx = [e^x]_0^1 \to e^1 - e^0 =$$
$$= e^1 - 1 \cong 1{,}71u^2$$

2. $\int_\pi^{2\pi} \sin x\,dx$

$$\int_\pi^{2\pi} \sin x\,dx = [\cos x]_\pi^{2\pi} \to$$
$$\to \cos 2\pi - \cos \pi = 2u^2$$

3. $\int_0^1 \cos x\,dx$

$$\int_0^1 \cos x\,dx = [\sin x]_0^1 \to \sin 1 - \sin 0 \cong 0{,}2u^2$$

4. $\int_2^4 3x^2 + 2x\,dx$

$$\int_2^4 3x^2 + 2x\,dx = [x^3 + x^2]_2^4 \to$$
$$\to (4^3 + 4^2) - (2^3 + 2^2) \cong 68u^2$$

5. $\int_{\frac{1}{2}}^{10} \frac{6}{2x} dx$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{10} \frac{6}{2x} dx \to 3\int_{\frac{1}{2}}^{10} \frac{2}{2x} dx = [3\ln|2x|]_{\frac{1}{2}}^{10} \to$$
$$\to 3\ln 20 - 3\ln 1 \cong 9u^2$$

9.4.2. Integración por partes

Si u y v son dos funciones de clase C_1 en el intervalo $[a,b] \Rightarrow$ se verifica $\int_a^b u(x)v'(x)\,dx =$ $= u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$ de modo abreviado $\int_a^b udv = uv|_a^b - \int_a^b vdu$.

9.4.3. Cambio de variable

Sea una función derivable en $[a,b]$ tal que u' es integrable en $[a,b]$. Sea f una función continua en el intervalo $u([a,b]) \Rightarrow \int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx = \int_a^b f\big(u(t)\big)\,u'(t)dt$.

10. Métodos de integración

10.1. Integración por descomposición

$$\int (\lambda f(x) + \mu g(x) + \cdots +)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx + \mu \int g(x)\,dx + \cdots + \int \ldots dx$$

*Es aplicado sobre todo a funciones trigonométricas

10.1.1. Ejemplos

1. $\int 3x^2 + 5x\,dx = \int 3x^2 dx \int 5xdx = x^3 + \frac{5x^2}{2} + C$
2. $\int \sin x + 3\tan x\,dx = \int \sin x\,dx + 3\int \tan x\,dx = -\cos x - \ln|\cos x| + C$
3. $\int \frac{x^3 - 7x^2 - 4}{x^2} dx = 3\int xdx - 7\int dx - 4\int \frac{1}{x^2} dx = x^2 - 7x + \frac{8}{x} + C$

10.2. Integración por partes

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\,dx \text{ ó abreviado} \int udv = uv - \int vdu$$

La integración por partes se suele aplicar a integrales de la forma $\int x^n f(x)\,dx$. En general se toma $u = x^n$ y $dv = f(x)dx$, salvo en el caso en el que la derivada de f sea una función racional o similar, tales como $\ln x$, $\operatorname{arctg} x$ ó $\operatorname{arcsen} x$. Para estos casos se toma $u = f(x)\ y\ dv = x^n dx$ siguiendo la estructura nemotécnica de ALPES, funciones del tipo arco, logaritmo, polinómica, exponencial y seno, coseno y tangente, siempre que hubiera que hacer una relación con varias funciones y hubiera de elegirse una o combinación de éstas.

10.2.1. Ejemplos

1. $\int xe^x dx \to \begin{Bmatrix} u = x & du = dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{Bmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$
2. $\int x^2 e^x\,dx \to \begin{Bmatrix} u = x^2 & du = 2x\,dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{Bmatrix} = x^2e^x - \int 2xe^x dx \to \begin{Bmatrix} u = 2x & du = 2\,dx \\ dv = e^x dx & v = e^x \end{Bmatrix} \to$
   $\to x^2e^x - \left(2xe^x - \int 2e^x dx\right) = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x\big(x^2 + (1-x)\big) + C$
3. $\int 2x\cos x \to \begin{Bmatrix} u = 2x & du = 2\,dx \\ dv = \cos x\,dx & v = \sin x \end{Bmatrix} = 2x\sin x - \int 2\sin x\,dx = 2x\sin x + 2\cos x + C =$
   $= 2(x\sin x + \cos x) + C$
4. $\int x\ln x \to \begin{Bmatrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx & v = \frac{x^2}{2} \end{Bmatrix} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C =$
   $= \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right) + C$
5. $\int x^3 \ln x\,dx \to \begin{Bmatrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^3 dx & v = \frac{x^4}{4} \end{Bmatrix} = \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^4}{4}\left(\ln x - \frac{1}{4}\right) + C$
6. $\int x^4 \ln x\,dx \to \begin{Bmatrix} u = \ln x & du = \frac{1}{x}dx \\ dv = x^3 dx & v = \frac{x^4}{4} \end{Bmatrix} = \frac{x^5}{5}\ln x - \int \frac{x^5}{5}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^5}{5}(\ln x + 1) + C$

10.3. Cambio de variable

$$\int f(x)dx = \int f\big(u(t)\big)u'(t)dt\Big|_{t=u^{-1}(x)}$$

10.3.1 Ejemplos

1. $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}dx \to \begin{Bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{Bmatrix} = \int \frac{1}{1+t^2}dt = \operatorname{arctg} t + C \xrightarrow{\text{cambio}} \operatorname{arctg}(\sin x) + C$
2. $\int \cos x \sin^3 x\,dx \to \begin{Bmatrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\,dx \end{Bmatrix} = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C \xrightarrow{\text{cambio}} \frac{\sin^4 x}{4} + C$
3. $\int \frac{x^2}{2x^3-7}dx \to \begin{Bmatrix} t = 2x^3 - 7 \\ dt = 6x^2 dx \end{Bmatrix} = \frac{1}{6}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{6}\ln|t| + C \xrightarrow{\text{cambio}} \frac{1}{6}\ln|2x^3 - 7| + C$
4. $\int 5x^2 e^{x^3} \to \begin{Bmatrix} t = x^3 \\ dt = 3x^2 dx \end{Bmatrix} = \frac{5}{3}\int e^t\,dt = \frac{5}{3}e^t + C \xrightarrow{\text{cambio}} \frac{5}{3}e^{x^3} + C$
5. $\int x(x^2 - 3)dx \to \begin{Bmatrix} t = x^3 \\ dt = 3x^2 dx \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\int tdt = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^2}{2} + C \xrightarrow{\text{cambio}} \frac{x^2-3}{4} + C$
6. $\int 2x(1+x^2)^2\,dx \to \begin{Bmatrix} t = x^2 \\ dt = 2xdx \end{Bmatrix} = \int (1+t)^3 dt = \frac{(1+t)^4}{4} + C \xrightarrow{cambio} \frac{(1+x^2)^4}{4} + C$

10.3.2. Integrales algebraicas irracionales

Se reducen a racionales, sea $\int R(x)\,dx; \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{P_1/q_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{P_k/q_k}\right) dx$ con $P_1, \dots, P_k, q_1, \dots, q_k \in \mathbb{Z}$

Cambio de variable $t = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{1}{m}}$ con $m = \text{m.c.m}(q_1, \dots, q_k)$, donde $\text{m.c.m}(q_1, \dots, q_k)$ representa el mínimo común múltiplo de $q_1, \dots, q_k$.

10.3.2.1 Ejemplos

1. $\int \frac{\sqrt{x-1}}{1+\sqrt[3]{x-1}} dx = \int \frac{(x-1)^{\frac{1}{2}}}{1+(x-1)^{\frac{1}{3}}} dx$

Los exponentes son $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, luego tenemos que calcular el mínimo común múltiplo de 2 y 3, $\text{m.c.m}(2,3) = 6$, por tanto:

$$t = (x-1)^{\frac{1}{6}} \xrightarrow{\text{despejando}} x = t^6 + 1 \to dx = 6t^5 dt$$

Sustituyendo

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{1+\sqrt[3]{x-1}} dx = \int \frac{t^3}{1+t^2} 6t^5 dt = 6 \int \frac{t^8}{1+t^2} dt$$

Como el grado de $P \geq Q$ procedemos a la división, de la que resulta $R(x) = 1$ y $C(x) = t^6 - t^4 + t^2 - 1$, por tanto:

$$6\left(\int t^6 - t^4 + t^2 - 1\,dt + \int \frac{1}{1+t^2} dt\right) \to\to \frac{6t^7}{7} - \frac{6t^5}{5} + \frac{6t^3}{3} - 6t + 6\text{arctg}\, t^2 + C \xrightarrow{\text{cambio}}$$

$$\to \frac{6}{7}(x-1)^{\frac{7}{6}} - \frac{6}{5}(x-1)^{\frac{5}{6}} + 2(x-1)^{\frac{1}{6}} - 6(x-1)^{\frac{7}{6}} + 6\text{arctg}(x-1)^{\frac{1}{6}} + C$$

10.3.3. Funciones racionales de seno y coseno

Sea $\int R(\sin x, \cos x) dx$

1. Cambio general: $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, con lo que

- $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$
- $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$
- $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

2. Si $R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$ el cambio es $t = \sin x$ y $dt = \cos x\, dx$
3. Si $R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$ el cambio es $t = \cos x$ y $dt = \sin x\, dx$
4. Si $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \Rightarrow$ el cambio es $t = \tan x$

- $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$
- $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$
- $dx = \frac{dt}{1+t^2}$

10.3.3.1. Ejemplos

1. $\int \frac{1}{1+\cos x} dx$

Utilizamos el cambio $t \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ pues la función no verifica las condiciones 2,3 y 4 luego:

$$\int \frac{dx}{1+\cos x} = \left\{\begin{matrix} \cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx = \dfrac{2dt}{1+t^2} \end{matrix}\right\} \to \int \frac{1}{1+\dfrac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)(1-t^2)} = \int \frac{2dt}{2} =$$

$$= \int dt \to t + C \xrightarrow{cambio} \tan\left(\frac{x}{2}\right) + C$$

2. $\int \frac{\cos^3 x}{8+\sin^3 x} dx$

La función es impar en coseno, verifica la condición 2, luego:

$$R(\sin x, -\cos x) = \frac{(-\cos^3 x)}{8+\sin^3 x} = -\frac{\cos^3 x}{8+\sin^3 x} = -R(\sin x, \cos x) \text{ Así:}$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{8+\sin^3 x} dx = \int \frac{(\cos^2 x)\cos x}{8+\sin^3 x} dx = \int \frac{(1-\sin^2 x)\cos x}{8+\sin^3 x} dx = \left\{\begin{matrix} t = \sin x \\ dt = \cos x\, dx \end{matrix}\right\} \to \int^{*} \frac{1-t^2}{8+t^3} dt$$

* Esta integral requiere de un proceso, primero el grado de $P \geq Q$, por tanto, procedemos a la determinación de raíces de Q haciendo Ruffini y obtenemos $(t+2)$ como raíz $\in \mathbb{R}$ y $x^2 - 2x + 4 \in \mathbb{C}$, luego:

$$\frac{1-t^2}{8+t^3} = \frac{A}{t+2} + \frac{M_1 x N_1}{t^2-2t+4} \to \frac{A(t^2-2t+4) + M_1 x N_1 (t+2)}{8+t^3} \to$$

$$\to 1 - t^2 = At^2 - 2At + 4A + M_1 t^2 + 2M_1 t + N_1 t + 2N_1$$

$$\begin{matrix} -1 = A + M_1 \\ 0 = -2A + 2M_1 + N_1 \\ 1 = 4A + 2N_1 \end{matrix} \left\| \begin{matrix} A = -\dfrac{1}{4} \\ M_1 = -\dfrac{3}{4} \\ N_1 = 1 \end{matrix} \right.$$

Luego

$$\int \frac{1-t^2}{8+t^3} dx = \int \frac{-\frac{1}{4}}{t+2} dt + \int^{*} \frac{-\frac{3}{4}t + 1}{t^2 - 2t + 4} dt$$

1* Esta integral requiere un proceso de simplificación, por tanto:

$$\int \frac{-\frac{3}{4}t + 1}{t^2-2t+4} dt = -\frac{3}{8} \int \frac{2t - \frac{8}{3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}}{t^2-2t+4} dt = -\frac{3}{8} \int \frac{2t-2}{t^2-2t+4} dt + \frac{1}{4} \int^{2*} \frac{dt}{t^2-2t+4}$$

2* Esta integral requiere de un proceso de simplificación por tanto:

$$\frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2-2t+4} = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{\beta^2 (t-\alpha)^2} \to t^2 - 2t + 4 = \beta^2 (t-\alpha)^2 \to$$

$$\to t^2 - 2t + 4 = \beta^2 t^2 \alpha^2 - 2t\alpha$$

$$\begin{matrix} 1 = 1 \\ -2 = -2\alpha \\ 4 = \beta^2 + \alpha^2 \end{matrix} \left\| \begin{matrix} \alpha = 1 \\ \beta = 3 \end{matrix} \right.$$

Así

$$\frac{1}{4} \int \frac{dt}{3 + (t-1)^2} = \frac{1}{12} \int \frac{dt}{1 + \dfrac{(t-1)^2}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{12} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \left(\dfrac{t-1}{\sqrt{3}}\right)^2} dt$$

Luego

$$\int \frac{\cos^3 x}{8+\sin^3 x} \to \int \frac{1-t^2}{8+t^3}dt = -\frac{1}{4}\int \frac{dt}{t+2} - \frac{3}{8}\int \frac{2t-2}{t^2-2t+4}dt + \frac{\sqrt{3}}{12}\int \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\left(\frac{t-1}{\sqrt{3}}\right)}dt \to$$

$$\to -\frac{1}{4}\ln|t+2| - \frac{3}{8}\ln|t^2-2t+4| + \frac{\sqrt{3}}{12}\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(t-1)\right) + C \xrightarrow{\text{cambio}}$$

$$\to -\frac{1}{4}\ln|\sin x+2| - \frac{3}{8}\ln|\sin^2 x - 2\sin x + 4| + \frac{\sqrt{3}}{12}\text{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}(\sin x - 1)\right) + C$$

10.4. Integración de funciones racionales

Una función racional es una función de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$ donde P y Q son dos polinomios. Para calcular la primitiva de una función racional lo primero que hay que hacer es conseguir que el grado de P sea menor que el grado de Q.

- Si el grado de $P \geq$ grado de $Q \Rightarrow$ dividimos $P(x) = Q(x) + R(x) \to \frac{P(x)}{Q(x)} = C(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$, donde C es el cociente y R el resto.

Luego $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int C(x)dx \int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$ con lo que tenemos $\int C(x)dx$, quedando un polinomio simple y $\int \frac{R(x)}{Q(x)}dx$, una función racional.

- El grado de $R < grado\ de\ Q$, para integrarla hemos de distinguir varios casos, según sean las raíces de $Q(x)$.

Casos

1. $Q(x)$ tiene raíces reales simples
2. $Q(x)$ tiene raíces reales múltiples
3. $Q(x)$ tiene raíces complejas simples
4. $Q(x)$ tiene raíces complejas múltiples

10.4.1. Caso 1

$Q(x)$ con raíces $(\alpha_i, i \in \mathbb{N})$; $Q(x) = A(x-\alpha_i)\cdot(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$ así $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha_i} + \frac{A_2}{x-\alpha_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-\alpha_n}$

*Este caso dará como solución tipos de $A_n \ln|x-\alpha_n|$

1. $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x}dx$

Procedemos a la división pues el grado de $P \geq$ al grado de Q del que resulta $R(x) = 25x^2 - 20x + 2$ y $C(x) = 5$ por tanto:

$$\int 5dx + \int \frac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x}dx$$

Procedemos ahora a la resolución de las raíces e igualamos el denominador a 0, tal que $x^3 - 5x^2 + 4x \to$

$x(x^2-5x+4)=0 \to \frac{5\pm\sqrt{9}}{2} \begin{smallmatrix} \nearrow 4 \\ \searrow 1 \end{smallmatrix} \to (x-1)(x-4)=0$ así:

$$\frac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x}=\frac{A}{(x)}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x-4)} \to \frac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x}=\frac{A(x-1)(x-4)+B(x)(x-4)+C(x)(x-1)}{x^3-5x^2+4x}$$

$$\to 25x^2-20x+2=Ax^2-5Ax+4A+Bx^2-4Bx+Cx^2-Cx$$

$$\left.\begin{array}{r} 25=A+B+C \\ -20=-5A-4B-C \\ 2=-4A \end{array}\right\| \begin{array}{l} A=\frac{1}{2} \\ B=\frac{-7}{3} \\ C=\frac{161}{6} \end{array}$$

Luego

$$\int 5dx+\int\frac{25x^2-20x+2}{x^3-5x^2+4x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x}-\frac{7}{3}\int\frac{dx}{x-1}+\frac{161}{6}\int\frac{dx}{x-4}=$$
$$=5x+\frac{1}{2}\ln|x|-\frac{7}{3}\ln|x-1|+\frac{161}{6}\ln|x-4|+C$$

2. $\int\frac{x}{x^3-5x^2+4x}dx$

Como el grado de $P<Q$ procedemos a la determinación de las raíces de Q igualando el denominador a 0, tal que $x^3-5x^2+4x=0 \to \frac{3\pm\sqrt{1}}{2} \begin{smallmatrix} \nearrow 2 \\ \searrow 1 \end{smallmatrix} \to (x-2)(x-1)$ así:

$$\frac{x}{x^3-5x^2+4x}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1} \to \frac{x}{x^3-5x^2+4x}=\frac{A(x-1)+B(x-2)}{x^3-5x^2+4} \to$$

$$\to x=Ax-A+Bx-2B$$

$$\left.\begin{array}{r} 1=A+B \\ 0=-A-2B \end{array}\right\| \begin{array}{l} A=2 \\ B=-1 \end{array}$$

Luego

$$\int\frac{x}{x^3-5x^2+4x}dx=2\int\frac{dx}{x-2}dx-\int\frac{dx}{x-1}=2\ln|x-2|-\ln|x-1|+C$$

3. $\int\frac{x-3}{x^3-x^2-2x}dx$

Como el grado de $P<Q$ procedemos a la determinación de las raíces de Q igualando el denominador a 0 tal que $x^3-5x^2+4x=0 \to x=0 \to x^2-x-2=0 \to \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} \begin{smallmatrix} \nearrow 2 \\ \searrow -1 \end{smallmatrix} \to (x-2)(x+1)$ así:

$$\frac{x-3}{x^3-x^2-2x}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{x} \to \frac{x-3}{x^3-x^2-2x}=\frac{A(x)(x+1)+B(x)(x-2)+C(x-2)(x+1)}{x^3-x^2-2x} \to$$

$$\to x-3=Ax^2+Ax+Bx^2-Bx+Cx^2-Cx-2C$$

$$\left.\begin{array}{r} 0=A+B+C \\ 1=A-2B-C \\ -3=-2C \end{array}\right\| \begin{array}{l} A=-\frac{1}{6} \\ B=-\frac{4}{3} \\ C=\frac{3}{2} \end{array}$$

Luego

$$\int \frac{x-3}{x^3-x^2-2x}dx = -\frac{1}{6}\int \frac{dx}{x-2} - \frac{4}{3}\int \frac{dx}{x+1} + \frac{3}{2}\int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{6}\ln|x-2| - \frac{4}{2}\ln|x+1| + \frac{3}{2}\ln|x| + C$$

10.4.2. Caso 2

$Q(x)$ con raíces reales múltiples $Q(x) = (x-\alpha)^r$, tendremos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-\alpha} + \cdots + \frac{A_{r-1}}{(x-\alpha)^{r-1}} + \frac{A_r}{(x-\alpha)^r} \text{ con } A_1, \ldots, A_{r-1}, A_r \in \mathbb{R}$$

1. $\int \frac{x}{(x-2)^2}dx$

Como el grado de $P < Q$ y no puede simplificarse procedemos a la determinación de raíces:

$$\int \frac{x}{(x-2)^2}dx = \int \frac{A}{(x-2)^2}dx \int \frac{B}{x-2}dx$$

$$\frac{x}{(x-2)^2} = \frac{A}{(x-2)^2} + \frac{B}{x-2} \to x = A + B(x-2) \to x = A + Bx - 2B$$

$$\left.\begin{array}{c} 1 = B \\ 0 = A - 2B \end{array}\right\| \begin{array}{l} A = 2 \\ B = 1 \end{array}$$

Luego

$$\int \frac{x}{(x-2)^2}dx = 2\int \frac{dx}{(x-2)^2} + \int \frac{dx}{x-2} = \frac{-2}{x-2} + \ln|x-2| + C$$

10.4.3. Caso 3

$Q(x)$ con raíces complejas simples $Q(x) = (x^2+\alpha_1 x + C_1)\cdot(x^2+\alpha_2 x + C_2)\ldots(x^2+\alpha_n x + C_n)$, tendremos: $\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{M_1x+N_1}{x^2+\alpha_1x+C_1} + \frac{M_2x+N_2}{x^2+\alpha_2x+C_2} + \cdots + \frac{M_nx+N_n}{x^2+\alpha_nx+C_n}$ con $M_1, N_1 \ldots M_n, N_n \in \mathbb{R}$

1. $\int \frac{x^4-2x^3+3x^2-x+3}{x^3-2x^2+3x}dx$

Procedemos a la división pues el grado de $P \geq Q$ del que resulta $R(x) = -x+3$ y $C(x) = x$ por tanto:

$$\int x dx + \int \frac{-x+3}{x^3-2x^2+3x}dx$$

Procedemos ahora a la resolución de las raíces, igualamos el denominador a 0, tal que: $x^3-2x^2+3x = 0 \to x = 0 \to x^2-2x+3 = 0$, desde este último polinomio resulta una raíz compleja, es decir, $x^2-2x+3 \in \mathbb{C}$ luego:

$$\frac{-x+3}{x^3-2x^2+3x} = \frac{A}{x} + \frac{M_1x+N_1}{x^2-2x+3} \to \frac{A(x^2-2x+3) + M_1x^2 + N_1x}{x^3-2x^2+3x} \to$$

$$\to -x+3 = Ax^2 - 2Ax + 3A + M_1x^2 + N_1x$$

$$\left.\begin{array}{c} 0 = A + M_1 \\ -1 = -2A + N_1 \\ 3 = 3A \end{array}\right\| \begin{array}{l} A = 1 \\ M_1 = -1 \\ N_1 = 1 \end{array}$$

Luego

$$\int \frac{-x+3}{x^3-2x^2+3x}dx = \int \frac{dx}{x} + \int^{*} \frac{-x+1}{x^2-2x+3}dx$$

* Esta integral es casi inmediata y necesita un ajuste pues, $\frac{g'(x)}{g(x)}$ por tanto es del tipo logaritmo.

$$\int \frac{-x+1}{x^2-2x+3}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{-2(-x+1)}{x^2-2x+3}dx$$

Quedando

$$\int \frac{x^4-2x^3+3x^2-x+3}{x^3-2x^2+3x}dx = \int xdx + \int \frac{dx}{x} - \frac{1}{2}\int \frac{-2(-x+1)}{x^2-2x+3}dx \rightarrow$$
$$\rightarrow \frac{x^2}{2} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x^2-2x+3| + C$$

10.4.4. Caso 4 (Método de Hermite)

$Q(x)$ con raíces complejas múltiples $Q(x) = (x^2+\alpha_1 x + C_1)^{r_1} \dots (x^2+\alpha_m x + C_m)^{r_n}$,

Tendremos

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{M_1x+N_1}{(x^2+\alpha_1x+C_1)^{r_1-1}} + \_\_ + \frac{M_nx+N_m}{(x^2+\alpha_mx+C_m)^{r_n-1}} + \int\left(\frac{M_1'x+N_1'}{x^2+\alpha_1x+C_1} + \_\_ + \frac{M_n'x+N_m'}{x^2+\alpha_mx+C_m}\right)dx$$

1. $\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}dx$

Como el grado de $P \geq Q$ procedemos a la determinación de raíces de Q igualando el denominador a 0 tal que $x^2-4x+5=0$, pero este polinomio resulta tener una raíz compleja doble, es decir, $x^2-4x+5 \in \mathbb{C}$ luego:

$$\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}dx = \frac{M_1x+N_1}{x^2-4x+5} + \int \frac{M_2x+N_2}{x^2-4x+5}dx$$

Procedemos a quitar la integral

$$\frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2} = \frac{M_1(x^2-4x+5)-(M_1x+N_1)(2x-4)}{(x^2-4x+5)^2} + \frac{M_2x+N_2}{x^2-4x+5} \rightarrow$$
$$\rightarrow \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2} = \frac{M_1(x^2-4x+5)-(M_1x+N_1)(2x-4)+M_2x+N_2(x^2-4x+5)}{(x^2-4x+5)^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^3+1 = (M_1x^2-4M_1x+5M_1)-(2M_1x^2-4M_1x+2N_1x-4N_1)+(M_2x^3-4M_2x^2+5M_2+N_2x^2-4N_2x+5N_2) \rightarrow$$
$$\rightarrow x^3+1 = M_2x^3 - M_1x^2 - 4M_2x^2 + N_2x^2 - 2N_1x + 5M_1x - 4N_2x + 5M_1 + 4N_1 + 5N_2$$

$$\left.\begin{array}{r} 1 = M_2 \\ 0 = -M_1 - 4M_2 + N_2 \\ 0 = -2N_1 + 5M_2 - 4N_2 \\ 1 = 5M_1 + 4N_1 + 5N_2 \end{array}\right\| \begin{array}{l} M_1 = \frac{3}{2} \\ M_2 = 1 \\ N_1 = \frac{-17}{2} \\ N_2 = \frac{11}{2} \end{array}$$

Luego

$$\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}dx = \frac{\frac{3}{2}x-\frac{17}{2}}{x^2-4x+5} + \int \frac{x+\frac{11}{2}}{x^2-4x+5}dx \rightarrow \frac{3x-17}{2(x^2-4x+5)} + \frac{1}{2}\int^{1*} \frac{2x+11}{x^2-4x+5}dx$$

1* Esta integral requiere aún un proceso de simplificación

$$\int \frac{2x+11}{x^2-4x+5}dx \rightarrow \int \frac{2x+11-15+15}{x^2-4x+5}dx \rightarrow \int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx + \int^{2*} \frac{15}{x^2-4x+5}dx$$

2* Esta integral requiere un proceso de simplificación de caso 3, pues tenemos una raíz compleja simple que no se puede resolver con el proceso normal; procedemos a la simplificación de la arcotagente.

$$\frac{1}{2}\int \frac{15}{x^2-4x+5}dx = \frac{15}{2}\int \frac{dx}{x^2-4x+5} \rightarrow x^2-4x+5 = \beta^2 + (x-\alpha)^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow x^2-4x+5 = \beta^2+\alpha^2+x^2-2x\alpha$$

$$\begin{matrix} -4 = -2\alpha \\ 5 = \beta^2+\alpha^2 \end{matrix} \Bigg\| \begin{matrix} \alpha = 2 \\ \beta = 1 \end{matrix}$$

Luego

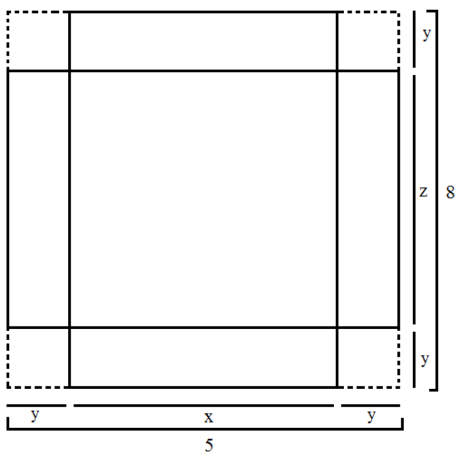
$$\frac{15}{2}\int \frac{dx}{1+(x-2)^2}$$

Así

$$\int \frac{x^3+1}{(x^2-4x+5)^2}dx = \frac{3x-17}{2(x^2-4x+5)} + \int \frac{2x-4}{x^2-4x+5}dx + \frac{15}{2}\int \frac{dx}{1+(x-2)^2} \rightarrow$$
$$\rightarrow \frac{3x-17}{2(x^2-4x+5)} + \ln|x^2-4x+5| + \frac{15}{2}\mathrm{arctg}(x-2) + C$$

11. Optimización ejemplos

1. Con una cartulina de 8x5 metros se desea construir una caja sin tapa de volumen máximo. Hallar las dimensiones de dicha caja.



La ecuación a optimizar es $V(x,y,z) = xyz$, donde x define el ancho de la caja, z el largo e y el alto. Dichas variables como definen dimensiones, no pueden ser negativas. Tampoco nulas porque no habría caja, por tanto

$$x > 0 \quad y > 0 \quad z > 0$$

Fijándonos en el dibujo, es posible deducir dos ecuaciones de ligadura.

$$2y + x = 5 \qquad 2y + z = 8$$

Despejando x y z:

$$x = 5 - 2y \qquad z = 8 - 2y$$

Dos variables han quedado ligadas a una sola, ahora utilizaremos las ecuaciones de ligadura para que la ecuación del volumen de tres variables pase a ser de una sola variable:

$$V(y) = (5-2y)y(8-2y) = 40y - 26y^2 + 4y^3$$

Ahora procedemos a calcular sus máximos y mínimos con derivadas:

$$V(y) = 40 - 26y + 4y^2$$

Igualamos a 0 y resolvemos la ecuación

$$V'(y) = 40 - 52y + 12y^2 = 0 \rightarrow y = \frac{52 \pm \sqrt{52^2 - 4 \cdot 40 \cdot 12}}{2 \cdot 12} = \frac{52 \pm 28}{24} = \begin{cases} y = \frac{10}{3} \\ y = 1 \end{cases}$$

Dos valores candidatos a máximos, mínimos o puntos de inflexión. Utilizando la derivada segunda:

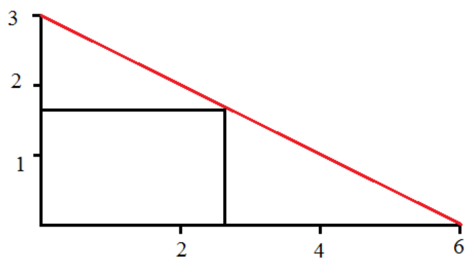
$$V''(y) = -52 + 24y \begin{cases} V''\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{644}{3} \text{ mínimo} \\ V''(1) = -28 \text{ máximo} \end{cases}$$

Una vez determinado el máximo, el resto de dimensiones se halla con las ecuaciones de ligadura:

$$x = 5 - 2y \rightarrow x = 5 - 2 = 3 \quad ; \quad z = 8 - 2y \rightarrow z = 8 - 2 = 6$$

Luego la caja de volumen máximo tiene por dimensiones 3x1x6

2. Un rectángulo está acotado por los ejes y por la gráfica $y = \frac{(6-x)}{2}$. ¿Qué longitud debe tener el rectángulo para que área sea máxima?



Como tenemos que optimizar una función de área de un rectángulo su expresión es:

$$A(x, y) = xy$$

Las dos variables por definir dimensiones deben ser mayores que 0 y menores que los valores lógicos que vemos en la gráfica:

$$0 < x < 6 \qquad 0 < y < 3$$

La ecuación de la ligadura es la que define la recta

$$y = \left(\frac{6-x}{2}\right)$$

Sustituimos en la ecuación del área

$$A(x) = x\left(\frac{6-x}{2}\right) \rightarrow \frac{6x - x^2}{2}$$

Derivamos para calcular sus máximos y mínimos

$$A'(x) = 3 - x$$

Igualamos a 0 y resolvemos la ecuación

$$A'(x) = 3 - x = 0 \rightarrow x = 3$$

Un valor candidato a máximo, mínimo o punto de inflexión, realizamos la segunda derivada:

$$A''(x) = -1 \rightarrow A''(3) = -1$$

Se trata de un máximo, una vez hallada la longitud de su base se resuelve la altura mediante la ecuación de la ligadura:

$$y = \left(\frac{6-x}{2}\right) \rightarrow \left(\frac{6-3}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

Luego el área máxima del rectángulo es 3x$\frac{3}{2}$