Cálculo II

Ingeniería agrónoma grado en hortofruticultura y jardinería

3ª Edición

Jorge Cerezo Martínez

1. Nociones de topología matemática en $\mathbb{R}^n$

Definición

Sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ Llamaremos norma euclidea o norma de x a :

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2, x_2^2, \dots, x_n^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x^2{}_j}$$

Proposición

Se verifica las siguientes propiedades:

1. $|x| \geq 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}$
2. $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$
3. $\|\lambda x\| = \|\lambda\| \cdot \|x\| \ \forall \ \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$
4. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \ \forall \ x, y \in \mathbb{R}^n$

Definición

Sea $x, y \ \in \mathbb{R}^n$. Llamaremos distancia x a y al número real $d(x, y) = \|x \cdot y\|$

Definición

Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $r \in \mathbb{R}$ con $>$:

1. Llamaremos bola abierta de centro (o centrada) en "x" y radio "r" a:

$$B(x, r) = y \in \mathbb{R}^n / \|y - \lambda\| < r$$

2. Llamaremos bola cerrada de centro en "x" y radio "r" a:

$$\overline{B}(x, r) = y \in \mathbb{R}^n / \|y - x\| \leq r$$

Definición

Llamaremos entorno a cualquier bola abierta centrada en ese punto.

Definición

Un conjunto no vacio $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es abierto $\forall \in A \ \exists$ un $r > 0 \ /: B(a, r) \subseteq A$. Un conjunto $c \subseteq \mathbb{R}^n$ es cerrado si R~c es abierto. Por definición, el conjunto vacío se considera tanto abierto como vacío.

Definición

Sea $B \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto se define:

1. El interior de B, denotado por $\mathrm{int}(B)$, como el mayor abierto en B.
2. La clausura de B, denotado por $\mathrm{cl}(B)$, como el menor cerrado que contiene a B.
3. La frontera de B, denotado por $\mathrm{Fr}(B)$ o por δB con $\mathrm{Fr}(B) = \mathrm{Cl}(B) \sim \mathrm{int}(B)$.

Un conjunto $B \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado si está contenida en una bola.

Definición

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ es acotado si está contenido en una bola, ($A \subseteq \mathbb{R}^n$ acotada si $\exists \ \delta > 0 | A \subseteq B(\theta, \delta) |$)

Definición

Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice acotado si $\exists$ un número real positivo k de manera que $\|\lambda\| \subseteq k \ \forall$ punto de $x \in A$.

Definición

Un conjunto $B \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto si es cerrado y acotado.

Definición

Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ se dice que $x \in \mathbb{R}^n$ es un punto compacto si es cerrado y acotado $\forall$ nº $\mathbb{R}$ $E > 0$, el conjunto:

$$B(x, E) \cap \neq 0$$

Los puntos de acumulación son aquellos sobre los que posteriormente podremos calcular límites de funciones de varias variables. Si el conjunto de A es abierto, todo punto de A es de acumulación

Ejercicios

Decid como los siguientes son los siguientes conjuntos y calcular si int, Cl, Fr.

1. $A:\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$
2. $B:\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y < 1\}$
3. $C:\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 0\}$
4. $D:\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x} > 1\right\}$
5. $E:\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1\}$
6. $F:\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2\}$
7. $G:\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$
8. $H:\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{x} \leq 1\right\}$
9. $I:\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 > 1\}$
10. $J:\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 \geq 2\}$
11. $K:\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \mathrm{mdx}\{|x|, |y| \leq 1\}\right\}$

2. Límites y continuidad de funciones reales de varias variables

Definición

Una función escalar de varias variables es una aplicación $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

A: El conjunto A recibe el nombre de campo de definición o dominio y se denota en general $D(f)$, y el conjunto de todos los valores que toma la función se llama imagen o recorrido.

Definición

Una función vectorial de varias variables es una aplicación donde $m > u\ f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

El conjunto A recibe El nombre de dominio de f y se denota por $D(f)$. Las funciones escalares $f_1, f_2, \dots, f_m$ se llaman componentes de f.

Definición

Sea $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Se dice que f está acotada en A si $\exists$ una constante $M > 0$ tal que $\|f(x)\| < M$ para cada $x \in A$. Una función está acotada $\Rightarrow$ lo están sus componentes.

Definición

Sea $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función de varias variables y sea $a \in D$. Diremos que $L \in \mathbb{R}^m$ es el límite de f cuando x tiende a $\lim_{x\to a} f(x) = L\ \ \forall \varepsilon > 0\ \exists\ un\ \delta > 0\ tal\ que\ si\ 0 < \|x - a\| < \delta \Rightarrow: |f(x) - L| < \varepsilon$. Se escribe como $|f(x) - L| < \varepsilon$. Esto es útil en cierta medida debido al siguiente resultado, el cual reduce al cálculo de límites para funciones vectoriales al correspondiente problema para funciones reales.

Proposición

El límite en caso de $\exists$ es único. Llamando $f_1, \dots, f_m$ a los componentes de f y tomando $L = (L_1, \dots, L_n)$ se tiene que $\lim_{x\to a} f(\lambda) = \lim_{x\to a} f_i(x) = L_i$, $i = 1,2,3 \dots$, de esta manera basta con estudiar los límite de funciones escalares.

Las funciones vectoriales se pueden estudiar componente a componente.

Propiedades

Con respecto a los límites y las operaciones entre funciones se obtiene:

$$L_1 = \lim_{x\to a} f(x)\ \text{ y } L_2 = \lim_{x\to a} g(x)$$

1. $\lim_{x\to a}(\alpha f + \beta g) \cdot (x) = \alpha L_1 + \beta L_2$
2. Si $m = 1 \Rightarrow \lim_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = L_1 \cdot L_2$
3. Si $m = 1$ y $L_2 \neq 0\ \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}$

3. Cálculo del límite

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función $y(a,b) \in D$. Vamos a ver técnicas para reducir el cambio del límite de f al cambio de límites de funciones reales de variable real, tenemos $\lim\ f(x,y) \Rightarrow (x,y) \to (a,b)$.
Proposición

$$\text{Sean} \lim_{xy} = \lim_{y\to b}\left(\lim_{x\to a} f(x,y)\right) \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{yx} = \lim_{x\to a}\left(\lim_{y\to b} f(x,y)\right) \in \mathbb{R}$$

$$\text{Si} \ \exists \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L \Rightarrow L_{xy} = L_{yx} = L$$

Así como consecuencia

1. Si $L_{yx}, L_{xy} \in \mathbb{R}$ y$L_{xy} \neq L_{yx} \Rightarrow \nexists \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$
2. Si $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L_{xy} = L_{yx}$
3. Puede que $\exists$ L_{xy} ó L_{yx} los dos y que $\exists$ $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$

3.1. Ejemplos

3.1.1 Calcular $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}\right)$

Al sustituir $(0,0)$ en la función obtenemos indeterminación $\frac{0}{0}$. Pero podemos eliminar la indeterminación procediendo tal que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2} \to \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \to \lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2+y^2 = 0$$

3.2. Ejemplos de límites radiales

3.2.1. Calcular el límite radial $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy-x+y}{x+y}$

Se sustituye $y = mx$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(xm) - x + (xm)}{x + (xm)} \to \lim_{x\to 0} \frac{x\big((xm) - 1 + (m)\big)}{x\big(1 + (m)\big)} \to \lim_{x\to 0} \frac{mx - 1 + m}{1+m} = \frac{m-1}{m+1}$$

Puesto que el resultado depende de m, el limite general $\nexists$

3.2.2. Calcular el límite radial $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$

Se sustituye $y = mx$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-(xm)}{x+(xm)} \to \lim_{x\to 0} \frac{x(1-m)}{x(1+m)} \to \lim_{x\to 0} \frac{1-m}{1+m} = \frac{1-m}{1+m}$$

Puesto que el resultado depende de m, el limite general $\nexists$

3.2.3. Calcular el límite radial $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^4}$

Se sustituye $y = mx$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2(xm)}{x^4+(xm)^4} \to \lim_{x\to 0} \frac{x^2(xm)}{x^2(x^2+m^2)} \to \lim_{x\to 0} \frac{xm}{x^2+m^2} = \frac{0}{m^2} = 0\ \forall m \in \mathbb{R}$$

No podemos garantizar la $\exists$ del límite en el punto $(0,0)$. Aunque en el caso de $\exists$ sería 0

3.2.4. Calcular el límite radial $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy}{x^2+y^2}$

Se sustituye $y = mx$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x(xm)}{x^2+(xm)^2}\to\lim_{x\to 0}\frac{x^2(3m)}{x^2(1+m^2)}\to\lim_{x\to 0}\frac{3m}{1+m^2}=\frac{3m}{1+m^2}$$

Puesto que el resultado depende de m, el limite general $\nexists$

4. Límites direccionales

Considerando una función $y=g(x)$ de manera que $\lim_{x\to a} g(x)=b$ se define el límite direccional a lo largo de g como $\lim_{x\to a} f\big(x, g(x)\big)=L_g$.
Proposición
Si $\exists\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=L$, se verifica que $L=L_g\forall$ función g satisfaciendo la definición de límite direccional en (a,b) así:

1. Si encontramos dos funciones reales de variable real g y g_2 satisfaciendo la definición de límite direccional en (a,b) de manera que $L_g\neq L_{g_2}\Rightarrow$ podemos afirmar que $\nexists\ \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.
2. Si $L_g\notin\mathbb{R}$ para alguna g $\Rightarrow$ podemos afirmar que $\nexists\ \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ éste tomaría valor L_g.

4.1. Paso a coordenadas polares

El paso de coordenadas polares permite el cálculo del límite sin tener que utilizar la definición. Este procedimiento consiste en asignar a cada punto (x,y) salvo el $(0,0)$ unas nuevas coordenadas que son radio de dicho vector y el ángulo que forma con el eje x, a la relación entre las coordenadas cartesianas y polares viene dada por la relación $\begin{cases}x=r\cdot\cos\theta\\ y=r\cdot\sin\theta\end{cases}$ así la función considerada $f(x,y)$ se escribe $f\left(\underbrace{r}_{x},\underbrace{\theta}_{y}\right)=$ $f(r\cdot\cos\theta, r\cdot\sin\theta)$.

4.2. Ejemplos

1. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{(r\cdot\cos\theta)^2(r\cdot\sin\theta)}{(r\cdot\cos\theta)^2+(r\cdot\sin\theta)^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^3(\cos^2\theta\cdot\sin\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\xrightarrow{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$$

$$\lim_{r\to 0}\frac{r\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta}{1}=\lim_{r\to 0} r\cdot\cos^2\theta\cdot\sin\theta=0$$

La función es continua en el origen, ya que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$

2. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x+y}{x-y} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x+y}{x-y}=\lim_{r\to 0}\frac{r\cos\theta+r\sin\theta}{r\cos\theta-r\sin\theta}=\lim_{r\to 0}\frac{r(\cos\theta+\sin\theta)}{r(\cos\theta-\sin\theta)}=\lim_{r\to 0}\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}$$

Al depender sólo de θ $\nexists$ el límite doble y la función no es continua

3. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{(r\cdot\sin\theta)^2}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^2(\sin^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\xrightarrow{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin^2\theta}{1} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \sin^2\theta$$

Al depender sólo de θ ∄ el límite doble y la función no es continua

4. $f(x,y) = \begin{cases} y\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} y\cdot\sin\frac{1}{x^2+y^2} = \lim_{r\to0} r\sin\theta\cdot\sin\frac{1}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2} \xrightarrow{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1} \lim_{r\to0} r\sin\theta\cdot\sin\frac{1}{r^2} = 0$$

La función es continua en el origen, ya que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

5. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to0}\frac{(r\cos\theta)(r\sin\theta)}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2} = \lim_{r\to0}\frac{r^2(\cos\theta\cdot\sin\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} \xrightarrow{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1} \lim_{r\to0}\sin\theta\cos\theta$$

Al depender sólo de θ ∄ el límite doble y la función no es continua

6. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{yx^2-y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{yx^2-y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to0}\frac{(r\sin\theta)(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^3}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2} = \lim_{r\to0}\frac{r^3\big((\sin\theta\cos^2\theta)-(\sin^3\theta)\big)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} \xrightarrow{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}$$

$$\lim_{r\to0} r\big((\sin\theta\cos^2\theta)-(\sin^3\theta)\big) = \lim_{r\to0} r\sin\theta\,(\cos^2\theta-\sin^2\theta) \xrightarrow{\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta}$$

$$\lim_{r\to0} r\sin\theta\cos2\theta = 0$$

La función es continua en el origen, ya que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$

7. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^3+y^3} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy^2}{x^3+y^3} \to \lim_{r\to0}\frac{(r\cos\theta)\cdot(r\sin\theta)^2}{(r\cos\theta)^3+(r\sin\theta)^3} \to \lim_{r\to0}\frac{r^3(\cos\theta\cdot\sin\theta)}{r^3(\cos^3\theta+\sin^3\theta)} = \frac{(\cos\theta\cdot\sin\theta)}{(\cos^3\theta+\sin^3\theta)}$$

Al sólo depender de θ ∄ límite doble y la función no es continua

8. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} \to \lim_{r\to0}\frac{(r\cos\theta)^2\cdot(r\sin\theta)^2}{(r\cos\theta)^4+(r\sin\theta)^4} \to \lim_{r\to0}\frac{r^4(\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta)}{r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)} \to \frac{\cos^2\theta\cdot\sin^2\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}$$

Al sólo depender de θ ∄ límite doble y la función no es continua

9. $f(x,y) = \begin{cases} e^{\frac{x^3}{x^2+y^2}} & (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{\frac{x^3}{x^2+y^2}} \to \lim_{r\to0} e^{\frac{(r\cos\theta)^3}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}} \to \lim_{r\to0} e^{\frac{r^3(\cos^3\theta)}{r^2\left(\frac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{1}\right)}} \to \lim_{r\to0} e^{r\cos^3\theta} = 1$$

La función es continua en el origen, ya que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 1$

10. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2(x-y)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2(x-y)}{x^2+y^2}\to\lim_{r\to 0}\frac{r^2\cos^2\theta\,(r\cos\theta-r\sin\theta)}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}\to r\cos^2\theta\,(\cos\theta-\sin\theta)=0$$

La función es continua en el origen, ya que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$

11. $f(x,y)=\begin{cases}x+x^2y^2\sin\left(\frac{y}{x}\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x+x^2y^2\sin\left(\frac{y}{x}\right)\to\lim_{r\to 0} r\cos\theta+r^2\cos^2\theta\, r^2\sin^2\theta\sin\left(\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right)=0$$

La función es continua en el origen, ya que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=f(0,0)=0$

4.3. Otros ejemplos de coordenadas polares

1. Estudiar $\lim_{(x,y)\to(-1,2)}\frac{x^2+y^2-5}{x+y-1}$

Se realiza el cambio a polares $x=-1+r\cos\theta\,;\,y=2+r\sin\theta$

$$\lim_{(x,y)\to(-1,2)}\frac{x^2+y^2-5}{x+y-1}\to\lim_{r\to 0}\frac{(-1+r\cos\theta)^2+(2+r\sin\theta)^2-5}{-1+r\cos\theta+2+r\sin\theta-1}\to$$

$$\to\lim_{r\to 0}\frac{1-2r\cos\theta+r^2\cos^2\theta+4+4r\sin\theta+r^2\sin^2\theta-5}{-1+r\cos\theta+2+r\sin\theta-1}\to\lim_{r\to 0}\frac{-2r\cos\theta+r^2\cos^2\theta+4r\sin\theta+r^2\sin^2\theta}{r\cos\theta+r\sin\theta}\to$$

$$\to\lim_{r\to 0}\frac{-2r\cos\theta+r^2\cos^2\theta+4r\sin\theta+r^2\sin^2\theta}{r\cos\theta+r\sin\theta}\to\lim_{r\to 0}\frac{r\left(-2\cos\theta+4\sin\theta+r\left(\overbrace{\cos^2\theta+\sin^2\theta}^{1}\right)\right)}{r(\cos\theta+\sin\theta)}\to$$

$$\to\lim_{r\to 0}\frac{-2\cos\theta+4r\sin\theta+r}{\cos\theta+\sin\theta}=\frac{-2\cos\theta+4r\sin\theta}{\cos\theta+\sin\theta}$$

Puesto que el resultado depende de θ, el limite pedido $\nexists$

Proposición

Sean $f\colon D\subset\mathbb{R}^2\to R$ y $(0,0)\in D$ si $\exists\, l\in\mathbb{R}$ tal que $\lim_{r\to 0} f(r,\theta)=l\ \ \forall\,\theta\in[0,2\pi]$ y se tiene que $|f(r,\theta)-l|\leq F(r)\ \forall\,\theta\in[0,2\pi]$ donde $F(r)$ es una función real de variable real satisfaciendo que $\lim_{r\to 0} F(r)=0\Rightarrow\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=l$.

El límite l es uniformemente independiente de θ cuando r tiene a 0.

Proposición

Sean $f\colon D\subset\mathbb{R}^2\to R$ y $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Si $\exists\ \lim_{r\to 0} f(a+r\cos\theta\,,b+r\sin\theta)=l\in\mathbb{R}\Rightarrow\exists\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)=l$

En caso de que $\nexists$, sea infinito o dependiente de θ, el límite $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

Concavidad en varias variables

Definición

Sea $f\colon D\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ una función de varias variables y sea $x_0\in D$. Se dice que f es continua en x_0 si $\exists\lim_{x\to x_0} f(x)$ y se cumple $f(x_0)=\lim_{x\to x_0} f(x)$.

Propiedades

Sea $f: D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es continua $\leftrightarrow$ son continuas sus funciones coordenadas $fi: D\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $i = 1,2, \dots, m$

Los siguientes operaciones, sumas, producto, producto por escalar, cociente $(g \neq 0)$, de f continuas y reales es continua.

Teorema (Weiertrass)

Sea k un compacto de R^4, y $f \cdot k \subseteq R^n \to R$ una función real de varias variables que es continua sobre $k \Rightarrow \exists$ puntos $x_{máx}$, $x_{mín} \in k$ tales que $\forall x \in k$ se cumple $f(x_{mín}) \leq f(x) \leq f(x_{máx})$.

4.4. Ejemplos de definición de límite

1. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Indeterminación $\frac{0}{0}$

- $f_1(x,y) \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$
- $f_2(x,y) \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{y^2}{y^2} = 1$

$\exists$ los límites iterados y son iguales, por tanto, diremos que $\exists$ el límite doble

2. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Indeterminación $\frac{0}{0}$

- $f_1(x,y) \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^2} = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$
- $f_2(x,y) \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^2} = \lim_{y\to 0} y^2 = 0$

$\exists$ los límites iterados y son iguales, por tanto, diremos que $\exists$ el límite doble

3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Indeterminación $\frac{0}{0}$

- $f_1(x,y) \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^3+xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to 0} x = 0$
- $f_2(x,y) \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^3+xy}{x^2+y^2}\right) = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y^2} = 0$

$\exists$ los límites iterados y son iguales, por tanto, diremos que $\exists$ el límite doble

4. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

Indeterminación $\frac{0}{0}$

- $f_1(x,y)\ \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2+y^4}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x^2}=\lim_{x\to 0}x=0$
- $f_2(x,y)\ \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2+y^4}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{y^4}{y^2+y^4}=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{1+y^2}=\frac{0}{1}=0$

$\exists$ los límites iterados y son iguales, por tanto, diremos que $\exists$ el límite doble

5. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Indeterminación $\frac{0}{0}$

- $f_1(x,y)\ \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right)=\frac{0}{x^2}=0$
- $f_2(x,y)\ \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right)=\frac{0}{y^2}=0$

$\exists$ los límites iterados y son iguales, por tanto, diremos que $\exists$ el límite doble

6. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Indeterminación $\frac{0}{0}$

- $f_1(x,y)\ \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=\frac{x^2}{x^2}=1$
- $f_2(x,y)\ \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)=\frac{-y^2}{y^2}=-1$

$\exists$ los límites iterados y son iguales, por tanto, diremos que $\exists$ el límite doble

7. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2(y-1)+y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Indeterminación $\frac{0}{0}$

- $f_1(x,y)\ \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2(y-1)+y^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}(-1)=-1$
- $f_2(x,y)\ \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2(y-1)+y^2}{x^2+y^2}\right)=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y^2}=\lim_{y\to 0}1=1$

$\exists$ los límites iterados pero son distintos, por tanto, diremos que $\nexists$ el límite doble

8. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{xy+(x-y)^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Indeterminación $\frac{0}{0}$

- $f_1(x,y)\ \lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{xy}{xy+(x-y)^2}\right)\to\lim_{x\to 0}0=0$
- $f_2(x,y)\ \lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2(y-1)+y^2}{x^2+y^2}\right)\to\lim_{y\to 0}0=0$

∃ los límites iterados y son iguales, por tanto, diremos que ∃ el límite doble

4.5. Ejemplos (completo)

1. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

a) Límite direccional, f en $(0,0)$ según la recta $y=mx$

b) Polares, estudiar la continuidad de f en $(0,0)$

c) Límites iterados, calcular sus derivadas parciales en el punto $(0,0)$

a) Límites direccionales

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{\left(x+(mx)\right)^2}{\left(x^2+(mx)\right)^2}=\lim_{x\to0}\frac{\left(x(1+m)\right)^2}{\left(x^2(x+m)\right)^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^2(1+2m+m^2)}{x^2(x^2+2mx+m^2)}=$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{1+2m+m^2}{m^2}$$

No podemos garantizar la ∃ de límite de f en el punto $(0,0)$. Aunque en el caso de ∃ sería 0.

b) Utilizando el criterio de coordenadas polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to0}\frac{(r\cos\theta+r\sin\theta)^2}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}=\lim_{r\to0}\frac{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\xrightarrow{\cos^2\theta+\sin^2\theta=1}$$
$$\lim_{r\to0}\frac{1}{1}=1$$

Se tiene que ∃ el límite de f en el punto $(0,0)$, es 1 y no coincide con el valor de f en $(0,0)$, por tanto, f es continua en $(0,0)$.

c) Siguiendo la definición por límites iterados

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^2}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}=\infty$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\frac{h^2}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}=\infty$

∄ las dos derivadas parciales de 1^er orden, por tanto, no es derivable.

2. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

a) Límite direccional, f en $(0,0)$ según la recta $y=mx$

b) Polares, estudiar la continuidad de f en $(0,0)$

c) Límites iterados, calcular sus derivadas parciales en el punto $(0,0)$

a) Límites direccionales

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4+(mx)^4}{x^2+(mx)^2}=\lim_{x\to0}\frac{x^4(1+m^4)}{x^2(1+m^2)}=\lim_{x\to0}x^2=0\ \forall m\in\mathbb{R}$$

Garantizamos la ∄ de límite de f en el punto $(0,0)$. Aunque en el caso de ∃ sería 0.

b) Utilizando el criterio de coordenadas polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}=\lim_{r\to0}\frac{(r\cos\theta)^4+(r\sin\theta)^4}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}=\lim_{r\to0}\frac{r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=$$

$$= \lim_{r\to 0} \frac{r^2(\cos^4\theta + \sin^4\theta)}{(\cos^2\theta + \sin^2\theta)} \xrightarrow{\cos^2\theta+\sin^2\theta=1} \lim_{r\to 0} r^2(\cos^4\theta + \sin^4\theta) = 0$$

Se tiene que $\exists$ el límite de f en el punto $(0,0)$, es 0 y coincide con el valor de f en $(0,0)$, por tanto, f es continua en $(0,0)$.

c) Siguiendo la definición por límites iterados

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^4}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^4}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0} h = 0$

$\exists$ las dos derivadas parciales de 1^er^ orden y coinciden, por tanto es derivable

3. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Límite direccional, f en $(0,0)$ según la recta $y = mx$
b) Polares, estudiar la continuidad de f en $(0,0)$
c) Límites iterados, calcular sus derivadas parciales en el punto $(0,0)$

a) Límites direccionales

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+x(mx)}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+(x+m)}{x^2(1+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2}$$

No podemos garantizar la $\exists$ de límite de f en el punto $(0,0)$. Aunque en el caso de $\exists$ sería 0.

b) Utilizando el criterio de coordenadas polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)^3 + (r\sin\theta)(r\cos\theta)}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2(r\cos\theta)+\sin\theta\cos\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} \xrightarrow{\cos^2\theta+\sin^2\theta=1}$$

$$= \lim_{r\to 0} \sin\theta\cos\theta$$

Se tiene que $\nexists$ el límite de f en el punto $(0,0)$, por tanto, f no continua en $(0,0)$.

c) Siguiendo la definición por límites iterados

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^4}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3+h-0}{h} = \lim_{h\to 0} h^2+1 = 1$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h^2} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} = \infty$

$\nexists$ las dos derivadas parciales de 1^er^ orden, por tanto, no es derivable.

4. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2+y^4} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Límite direccional, f en $(0,0)$ según la recta $y = mx$
b) Polares, estudiar la continuidad de f en $(0,0)$
c) Límites iterados, calcular sus derivadas parciales en el punto $(0,0)$

a) Límites direccionales

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^4}{x^2+y^2+y^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3+(mx)^4}{x^2+(mx)^2+(mx)^4} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(x+m^4x^2)}{x^2(1+m^2+m^4x^2)} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+m^4x^2)}{(1+m^2+m^4x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{1+m^2}=0\ \forall m\in\mathbb{R}$$

Garantizamos la $\nexists$ de límite de f en el punto $(0,0)$

b) Utilizando el criterio de coordenadas polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^4}{x^2+y^2+y^4}=\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta)^3+(r\sin\theta)^4}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2+(r\sin\theta)^4}=\lim_{r\to 0}\frac{r^3(\cos^3\theta+\sin^4\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta+r^2\sin^4\theta)}=$$

$$=\lim_{r\to 0}\frac{r(\cos^3\theta+\sin^4\theta)}{1+r^2\sin^4\theta}=\frac{0}{1}=0$$

Se tiene que $\exists$ el límite de f en el punto $(0,0)$, es 0 y coincide con el valor de f en $(0,0)$, por tanto, f es continua en $(0,0)$.

c) Siguiendo la definición por límites iterados

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^4}{h^2+h^4}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^4}{1+h^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{1+h^2}=\frac{0}{1}=0$

$\exists$ las dos derivadas parciales de 1^er^ orden pero no coinciden, por tanto, no es derivable

5. $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

a) Límite direccional, f en $(0,0)$ según la recta $y=mx$
b) Polares, estudiar la continuidad de f en $(0,0)$
c) Límites iterados, calcular sus derivadas parciales en el punto $(0,0)$

a) Límites direccionales

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x(mx)^2}{x^2+(mx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3m^2}{x^2(1+m^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{xm^2}{(1+m^2)}=0\ \forall m\in\mathbb{R}$$

Garantizamos la $\nexists$ de límite de f en el punto $(0,0)$

b) Utilizando el criterio de coordenadas polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta)(r\sin\theta)^2}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}=\lim_{r\to 0}\frac{r^3(\cos\theta\sin^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\xrightarrow{\cos^2\theta+\sin^2\theta=1}$$

$$=\lim_{r\to 0}r\cos\theta\sin^2\theta=0$$

Se tiene que $\exists$ el límite de f en el punto $(0,0)$, es 0 y coincide con el valor de f en $(0,0)$, por tanto, f es continua en $(0,0)$.

c) Siguiendo la definición por límites iterados

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}=\infty$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^2}{h^2}-0}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}=\infty$

$\nexists$ las dos derivadas parciales de 1^er^ orden, por tanto, no es derivable

6. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Límite direccional, f en $(0,0)$ según la recta $y = mx$
b) Polares, estudiar la continuidad de f en $(0,0)$
c) Límites iterados, calcular sus derivadas parciales en el punto $(0,0)$

a) Límites direccionales

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x(mx)}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2m}{x^2(1+m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{m}{1+m^2}$$

No podemos garantizar la $\exists$ de límite de f en el punto $(0,0)$. Aunque en el caso de $\exists$ sería 0

b) Utilizando el criterio de coordenadas polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)(r\sin\theta)}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^2(\cos\theta\sin\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} \xrightarrow{\cos^2\theta+\sin^2\theta=1}$$

$$= \lim_{r\to 0} \cos\theta \sin\theta$$

Se tiene que $\nexists$ el límite de f en el punto $(0,0)$, por tanto, f no es continua en $(0,0)$

c) Siguiendo la definición por límites iterados

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2} = \infty$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2} = \infty$

$\nexists$ las dos derivadas parciales de 1[er] orden, por tanto, no es derivable

7. $f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Límite direccional, f en $(0,0)$ según la recta $y = mx$
b) Polares, estudiar la continuidad de f en $(0,0)$
c) Límites iterados, calcular sus derivadas parciales en el punto $(0,0)$

a) Límites direccionales

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} x(mx)\frac{x^2+(mx)^2}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0} x^2m\frac{x^2(1-m^2)}{x^2(1+m^2)} = \lim_{x\to 0} x^2m\frac{(1-m^2)}{(1+m^2)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} x^2m\frac{(x^2m-x^2m^3)}{(1+m^2)} = \frac{0}{1+m^2} = 0\ \forall m \in \mathbb{R}$$

Garantizamos la $\nexists$ de límite de f en el punto $(0,0)$

b) Utilizando el criterio de coordenadas polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} (r\cos\theta)(r\sin\theta)\frac{(r\cos\theta)^2-(r\sin\theta)^2}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2} =$$

$$= \lim_{r\to 0} r^2(\cos\theta\sin\theta)\frac{r^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} \xrightarrow{\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta} \lim_{r\to 0} r^2(\cos\theta\sin\theta)\cos 2\theta = 0$$

Se tiene que ∃ el límite de f en el punto (0,0), es 0 y coincide con el valor de f en (0,0), por tanto, f es continua en (0,0).

c) Siguiendo la definición por límites iterados

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\frac{h^2}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h\frac{-h^2}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h} = -1$

∃ las dos derivadas parciales de 1^{er} orden pero no coinciden, por tanto, no es derivable

8. $f(x,y) = \begin{cases}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

a) Límite direccional, f en (0,0) según la recta $y = mx$
b) Polares, estudiar la continuidad de f en (0,0)
c) Límites iterados, calcular sus derivadas parciales en el punto (0,0)

a) Límites direccionales

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^3+(mx)^3}{x^2+(mx)^2} = \lim_{x\to 0}x^2m\frac{x^3(1-m^3)}{x^2(1+m^2)} = \lim_{x\to 0}\frac{x(1-m^3)}{(1+m^2)} =$$

$$= \frac{0}{1+m^2} = 0\ \forall m\in\mathbb{R}$$

Garantizamos la ∄ de límite de f en el punto (0,0)

b) Utilizando el criterio de coordenadas polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0}\frac{(r\cos\theta)^3-(r\sin\theta)^3}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2} =$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{r^3(\cos^3\theta-\sin^3\theta)}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)} \xrightarrow{\cos^2\theta+\sin^2\theta=1} \lim_{r\to 0} r(\cos^3\theta-\sin^3\theta) = 0$$

Se tiene que ∃ el límite de f en el punto (0,0), es 0 y coincide con el valor de f en (0,0), por tanto, f es continua en (0,0).

c) Siguiendo la definición por límites iterados

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{h} = 1$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h^3}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{h} = -1$

∃ las dos derivadas parciales de 1^{er} orden pero no coinciden, por tanto, no es derivable

9. $f(x,y) = \begin{cases}\frac{x\sin y}{y} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$

a) Límite direccional, f en (0,0) según la recta $y = mx$
b) Polares, estudiar la continuidad de f en (0,0)
c) Límites iterados, calcular sus derivadas parciales en el punto (0,0)

a) Límites direccionales

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \sin y}{y} \to \lim_{x\to 0} \frac{x \sin mx}{mx} \to \lim_{x\to 0} \frac{\sin mx}{m} = \frac{0}{m} = 0\ \forall m \in \mathbb{R}$$

Garantizamos la $\nexists$ de límite de f en el punto $(0,0)$

b) Utilizando el criterio de coordenadas polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x \sin y}{y} \to \lim_{r\to 0} \frac{r\cos\theta\,(\sin(r\sin\theta))}{r\sin\theta} \to \lim_{r\to 0} \tan\theta\,(\sin(r\sin\theta)) = 0$$

Se tiene que $\exists$ el límite de f en el punto $(0,0)$, es 0 y coincide con el valor de f en $(0,0)$, por tanto, f es continua en $(0,0)$.

c) Siguiendo la definición por límites iterados

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\sin h}{h}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h^2} = \infty$

$\nexists$ las dos derivadas parciales de 1er orden, por tanto, no es derivable

10. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+(y-x)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Límite direccional, f en $(0,0)$ según la recta $y = mx$

b) Polares, estudiar la continuidad de f en $(0,0)$

c) Límites iterados, calcular sus derivadas parciales en el punto $(0,0)$

a) Límites direccionales

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+(y-x)^2} \to \lim_{x\to 0} \frac{x(mx)}{x^2+(mx-x)^2} \to \lim_{x\to 0} \frac{x^2 m}{x^2+(x^2m^2-2x^2m+x^2)}$$
$$\to \lim_{x\to 0} \frac{x^2(m)}{x^2(1+m^2-2m+1)} \to \lim_{x\to 0} \frac{m}{m^2-2m+2}$$

No podemos garantizar la $\exists$ de límite de f en el punto $(0,0)$. Aunque en el caso de $\exists$ sería 0.

b) Utilizando el criterio de coordenadas polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+(y-x)^2} \to \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)(r\sin\theta)}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta-r\cos\theta)^2} \to \lim_{r\to 0} \frac{r^2\cos\theta\sin\theta}{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta+\cos^2\theta-2\cos\theta\sin\theta)} \to$$

$$\to \lim_{r\to 0} \frac{\cos\theta\sin\theta}{\cos^2\theta+1-2\cos\theta\sin\theta} \to$$

Se tiene que $\nexists$ el límite de f en el punto $(0,0)$, por tanto, f no es continua en $(0,0)$

c) Siguiendo la definición por límites iterados

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} \to \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{h^2+h^2}-0}{h} \to \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2h}}{h} \to \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h^2} = \infty$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} \to \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h}{h^2+h^2}-0}{h} \to \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{2h}}{h} \to \lim_{h\to 0} \frac{1}{2h^2} = \infty$

$\nexists$ las dos derivadas parciales de 1er orden, por tanto, no es derivable

11. $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6}{x^6+(x^2-y)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

a) Límite direccional, f en $(0,0)$ según la recta $y = mx$

b) Polares, estudiar la continuidad de f en $(0,0)$

c) Límites iterados, calcular sus derivadas parciales en el punto $(0,0)$

a) Límites direccionales

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6}{x^6+(x^2-y)^2} \to \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{x^6+(x^2-mx)^2} \to \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{x^6+(x^2-mx)^2} \to \lim_{x\to 0} \frac{x^6}{x^6+x^2(x^2-2xm+m^2)} \to$$

$$\to \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+(x^2-2xm+m^2)} = \frac{0}{m^2} = 0$$

Garantizamos la $\nexists$ de límite de f en el punto $(0,0)$

b) Utilizando el criterio de coordenadas polares

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^6}{x^6+(x^2-y)^2} \to \lim_{r\to 0} \frac{(r\cos\theta)^6}{(r\cos\theta)^6+(r^2\cos^2\theta - r\sin\theta)^2} \to \lim_{r\to 0} \frac{r^6(\cos^6\theta)}{r^6(\cos^6\theta)+r^2(r^2\cos^4\theta - 2r\cos^2\theta\sin\theta+\sin^2\theta)} \to$$

$$\to \lim_{r\to 0} \frac{r^4(\cos^6\theta)}{r^4(\cos^6\theta)+(r^2\cos^4\theta-2r\cos^2\theta\sin\theta+\sin^2\theta)} = \frac{0}{\sin^2\theta} = 0$$

Se tiene que $\exists$ el límite de f en el punto $(0,0)$, es 0 y coincide con el valor de f en $(0,0)$, por tanto, f es continua en $(0,0)$.

c) Siguiendo la definición por límites iterados

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} \to \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^6}{h^4+h^6}-0}{h} \to \lim_{h\to 0} \frac{h}{1+h^2} = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} \to \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{-h^2}-0}{h} \to \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$

$\exists$ las dos derivadas parciales de 1er orden y coinciden, por tanto es derivable

4.6. Ejemplos de límites en distintos puntos al (0,0)

1- $\frac{x^3}{x^2+y^2}$ en los puntos $(0,0)(1,0)(0,1)$

➢ $(0,0)$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h^3} = 0$

$\exists$ las dos derivadas parciales de 1er orden pero no coinciden, por tanto, no es derivable

➢ $(1,0)$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,0)-f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{(1+h)^3}{(1+h)^2}-\frac{1^3}{1^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1,0+h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{1+h^2}-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1-h}{h+h^3} = \infty$

$\nexists$ las dos derivadas parciales de 1er orden, por tanto, no es derivable

- $(0,1)$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0+h,1)-f(0,1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^3}{h^2+1^2}-\frac{0}{1^2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h^2+1} = \frac{0}{1} = 0$
- $\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,1+h)-f(0,1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{0}{1+h^2}-0}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h(1+h^2)} = 0$

∃ las dos derivadas parciales de 1^er orden y coinciden, por tanto es derivable

4.7. Tipos de discontinuidad

Si una f nos es continua en un punto se dice que presenta una discontinuidad que puede ser:

- Evitable: Si ∃ y es finito el límite de la f en un punto.
- Esencial: Si ∄ o es infinito el límite de la f en el punto.

5. Diferenciación de funciones reales de varias variables

Derivadas parciales de una función de dos variables. Dada la función $f\colon D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, y un punto $A(x,y) \in D$, llamaremos derivada parcial primera de f en el punto (x,y) respecto a la variable x e y a las funciones:

- $f'_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h}$
- $f'_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$

También puede venir definido de la siguiente manera:

- $f'_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}$
- $f'_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$

Derivadas parciales y continuidad

La continuidad y la ∃ de las derivadas parciales no están solucionadas. Una f continua puede no tener derivadas parciales y viceversa.

Derivadas parciales de dos o más variables

Las derivadas parciales de funciones de más de dos variables se definen de forma análoga:
Se deriva respecto de cada variable considerando las otras variables.

5.1. Ejemplo

Dada $f(x,y) = x^2y + y^2 + x^2 + 5$

- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2xy + 2x$
- $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x^2 + 2y$

Derivadas parciales de orden superior

Sea $z = f(x,y)$, puesto que las derivadas parciales de 1^er orden $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$. Seguirán siendo funciones de x e y, y se pueden volver a derivar parcialmente para obtener las derivadas parciales de 2º orden y así sucesivamente, eso quiere decir $\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$.

- Con respecto a x $f_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$
- Con respecto a y $f_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$

5.2. Ejemplo

Dada $f(x, y) = x^2 + 2xy + 3y^3 - 1$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 2y \xrightarrow{2^o} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$

Derivadas cruzadas

Las derivadas de f_{xy} y f_{yx} se llaman derivadas parciales cruzadas y no son siempre iguales, análogamente se podrán definir las derivadas de orden n. Se definen por la siguiente expresión:

- $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$
- $f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$

Teorema de Schwartz

Si $f(x, y)$, $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ y $f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ son continuas en un conjunto abierto D $\Rightarrow$ se cumple $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

5.3. Ejemplos completos

1. Calcula las derivadas parciales segundas de $f(x, y) = \sin(x^2 y)$ y sus cruzadas

Parciales segundas

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \cos(x^2 y) \xrightarrow{2^o} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4x \sin(x^2 y)$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 \cos(x^2 y) \xrightarrow{2^o} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -x^4 \sin(x^2 y)$

Derivadas cruzadas

- $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = -4x^2 \sin(x^2 y)$
- $f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -2x^3 \sin(x^2 y)$

2. Calcula las derivadas parciales segundas de $f(x, y) = x^3 - y^3 + 6xy$ y sus cruzadas

Parciales segundas

- $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6y \xrightarrow{2^o} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$
- $\frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 + 6x \xrightarrow{2^o} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -6y$

Derivadas cruzadas

- $f_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 6$
- $f_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 6$

Criterio de las segundas derivadas parciales para la determinación de extremos relativos

Sea $f(x, y)$ una f de 2 variables con derivadas parciales de 2º orden continuas en una bola abierta $B\big((x_0, y_0) r\big)$ siendo (x_0, y_0) un punto crítico de f y consideradas el determinante.

$$\underbrace{H_f(x_0,y_0)}_{\substack{\text{Hessiano de f}\\ \text{en el punto}\\ (x_0,y_0)}} = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0,y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{vmatrix}$$

- Si $H_f(x_0,y_0) > 0\ y\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) > 0$, f tiene un mínimo relativo en (x_0,y_0)
- Si $H_f(x_0,y_0) > 0\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) < 0$ f tiene un máximo relativo en (x_0,y_0).
- Si $H_f(x_0,y_0) < 0$, f tiene un punto de silla en (x_0,y_0)
- Si $H_f(x_0,y_0) = 0$ este criterio no tiene conclusión

– El determinante $H_f(x_0,y_0)$ se denomina Hessiano de la función f en el punto (x_0,y_0).
– En el caso en que no se pueda afirmar con certeza qué tipo de punto crítico es, existen problemas prácticos que se pueden solucionar atendiendo a ciertos geométricos o a las características propias del problema

Extremos absolutos

Sea $z = f(x,y)$ una f definida en un subconjunto $A \subseteq R^2$. Se dice que:

- f alcanza un máximo absoluto en el punto (x_0,y_0) si $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)\ \forall$ punto $(x,y) \in A$.
- La f alcanza un mínimo absoluto en el punto (x_0,y_0) si $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)\ \forall$ punto $(x,y) \in A$.

Para la ∃ de extremos absolutos se considera el teorema de Weierstrass, toda función continua definida sobre un conjunto cerrado y acotado alcanza su máximo y su mínimo absoluto.
Para determinar los extremos absolutos hay que tener en cuenta que se pueden alcanzar tanto en los extremos relativos como en la frontera del dominio de definición.

Aplicaciones

Como en el caso de las funciones de variable, una aplicación muy importante del cálculo de derivadas de funciones de varias variables es la resolución de problemas de optimización, es decir, problemas relativos a hallar un extremo absoluto (máximo o mínimo) de una función en un cierto dominio.

5.4. Ejemplos

1. Hallarlos extremos relativos y puntos de silla para $f(x,y) = x^2 + y^2$

Se buscan los puntos críticos candidatos a ser extremos; las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x; \frac{\partial f}{\partial y} = 2y$$

Igualamos a 0 el sistema

$$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$$

Que da como resultado $x_0 = 0$ e $y_0 = 0$. Por tanto, tenemos un solo punto crítico $(x_0,y_0) = (0,0)$. Clasificamos dicho punto. Las segundas derivadas y cruzadas son:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2; \frac{\partial f}{\partial x\,\partial y} = 0, \frac{\partial f}{\partial y\,\partial x} = 0$$

Por tanto, en este caso la matriz Hessiana resulta:

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{(0,0)} \to H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = 4$$

Puesto que $4 = |H| > 0$ y $f_{xx} = 2 > 0$, concluimos que en $(0,0)$ hay un valor mínimo para la función que sería: $f_{Mín}(0,0) = 0^2 + 0^2 = 0$

2. Hallarlos extremos relativos y puntos de silla para $f(x, y) = x^3 - y^3 + 6xy$

Se buscan los puntos críticos candidatos a ser extremos; las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 6y;\ \frac{\partial f}{\partial y} = -3y^2 + 6x$$

Igualamos a 0 el sistema

$$\begin{cases} 3x^2 + 6y = 0 \\ -3y^2 + 6x = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema tenemos, en la segunda ecuación que $x = \frac{y^2}{2}$ y al reemplazarlo en la primera ecuación se tiene que:

$$3\left(\frac{y^2}{2}\right) + 6y = 0 \to \frac{3y^4}{4} + 6y = 0 \to 3y\left(\frac{y^3}{4} + 2\right) = 0 \to \begin{array}{r|l} y_0 = 0 & x_0 = 0 \\ y_0 = -2 & x_0 = 2 \end{array}$$

Por tanto, tenemos dos puntos críticos $(x_0, y_0) = (0,0)$ y $(x_0, y_0) = (2, -2)$
Clasificamos dichos puntos críticos. Las segundas derivadas parciales son:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y;\ \frac{\partial f}{\partial x\, \partial y} = 6, \frac{\partial f}{\partial y\, \partial x} = 6$$

Por tanto, en este caso la matriz Hessiana resulta:

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{(0,0)} \to H = \begin{bmatrix} 6x & 6 \\ 6 & -6y \end{bmatrix}$$

Entonces

- Primera matriz (Se sustituyen los valores)

$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{(0,0)} \to |H| = \begin{bmatrix} 6x & 6 \\ 6 & -6y \end{bmatrix} |H| = \begin{vmatrix} 0 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0\ \textit{concluimos que en}\ (0,0)$ hay un punto de silla

- Segunda matriz (Se sustituyen los valores)

$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{(0,0)} \to |H| = \begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \to |H| = 108 > 0$ y $f_{xx} = 12 > 0$, entonces concluimos que $(2, -2)$ hay un valor mínimo para la función, y es $f_{Mín}(2, -2) = 2^3 - 2^3 + 6 \cdot 2(-2) = -8$

3. Hallarlos extremos relativos y puntos de silla para $f(x, y) = x^3 - 3x^2y + 5y^3 - 15y$

Se buscan los puntos críticos candidatos a ser extremos; las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 6xy = 3x(x - 2y);\ \frac{\partial f}{\partial y} = -3x^2 + 15y^2 - 15 = -3(x^2 - 5y^2 + 5)$$

Igualamos a 0 el sistema

$$\begin{cases} 3x(x-2y)=0 \\ -3(x^2-5y^2+5)=0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema tenemos, en la primera ecuación que $x = 0$ y $x = 2y$ y al reemplazarlo en la segunda ecuación se tiene que:

$$\begin{cases} x=0 \to -5y^2+5 \to y^2=1 \to y=\pm 1 \\ x=2y \to 4y^2-5y^2+5=0 \to y^2=5 \to y=\pm\sqrt{5} \end{cases} \to \begin{cases} (0,1),(0,-1) \\ (2\sqrt{5},\sqrt{5})(-2\sqrt{5},-\sqrt{5}) \end{cases}$$

Clasificamos dichos puntos críticos. Las segundas derivadas parciales son:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=6x-6y, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=30y; \frac{\partial f}{\partial x\,\partial y}=-6x, \frac{\partial f}{\partial y\,\partial x}=-6x$$

Por tanto, en este caso la matriz Hessiana resulta:

$$H=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{(0,0)} \to H=\begin{bmatrix} 6(x-y) & -6x \\ -6x & 30y \end{bmatrix}$$

Entonces

- Primera matriz (Se sustituyen los valores)

$H=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{(0,0)} \to |H|=\begin{bmatrix} 6(x-y) & -6x \\ -6x & 30y \end{bmatrix} |H|=\begin{vmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 30 \end{vmatrix}=-180<0$ *concluimos que en* $(0,1)$ hay un punto de silla

- Segunda matriz (Se sustituyen los valores)

$H=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{(0,0)} \to |H|=\begin{bmatrix} 6(x-y) & -6x \\ -6x & 30y \end{bmatrix} |H|=\begin{vmatrix} 6 & 0 \\ 0 & -30 \end{vmatrix}=-180<0$ *concluimos que en* $(0,-1)$ hay un punto de silla

- Tercera matriz (Se sustituyen los valores)

$H=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{(0,0)} \to |H|=\begin{bmatrix} 6(x-y) & -6x \\ -6x & 30y \end{bmatrix} |H|=\begin{vmatrix} 6\sqrt{5} & -12\sqrt{5} \\ -12\sqrt{5} & 30\sqrt{5} \end{vmatrix}=180<0\ y\ f_{xx}=6\sqrt{5}>0$

entonces concluimos que $(2\sqrt{5},\sqrt{5})$ hay un valor mínimo para la función, y es $f_{\text{Mín}}(2\sqrt{5},\sqrt{5})=(2\sqrt{5})^3-3(2\sqrt{5})^2\sqrt{5}+5(\sqrt{5})^3-15\sqrt{5}=5\sqrt{5}$

- Cuarta matriz (Se sustituyen los valores)

$H=\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{(0,0)} \to |H|=\begin{bmatrix} 6(x-y) & -6x \\ -6x & 30y \end{bmatrix} |H|=\begin{vmatrix} -18\sqrt{5} & 12\sqrt{5} \\ 12\sqrt{5} & -60\sqrt{5} \end{vmatrix}=4680<0\ y\ f_{xx}=-18\sqrt{5}<0$

entonces concluimos que $(2\sqrt{5},\sqrt{5})$ hay un valor máximo para la función, y es $f_{\text{Máx}}(-2\sqrt{5},-\sqrt{5})=(-2\sqrt{5})^3-3(-2\sqrt{5})^2(-\sqrt{5})+5(-\sqrt{5})^3+15\sqrt{5}=-35\sqrt{5}$

4. Hallarlos extremos relativos y puntos de silla para $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x - y^2)^2$

Se buscan los puntos críticos candidatos a ser extremos; las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4(x - y^2) = 4(x^3 - x + y^2); \frac{\partial f}{\partial y} = 4y^2 - 4(x - y^2) \cdot (-2y) = 4y(2x - y^2)$$

Igualamos a 0 el sistema

$$\begin{cases} 4(x^3 - x + y^2) = 0 \\ 4y(2x - y^2) = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema tenemos, en la primera y segunda ecuación que $y = 0$ y $y^2 = 2x$ y al reemplazarlo se tiene que:

$$\begin{array}{c|c} y_0 = 0 & x_0 = 0 \\ y_0 = 0 & x_0 = -1 \\ y_0 = 0 & x_0 = 1 \end{array}$$

Por tanto, tenemos tres puntos críticos $(x_0, y_0) = (0,0)$, $(x_0, y_0) = (1,0)$ y $(x_0, y_0) = (-1,0)$
Clasificamos dichos puntos críticos. Las segundas derivadas parciales son:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 4(3x^2 - 1), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8x - 12y^2; \frac{\partial f}{\partial x\, \partial y} = 8y, \frac{\partial f}{\partial y\, \partial x} = 8y$$

Por tanto, en este caso la matriz Hessiana resulta:

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{(0,0)} \rightarrow H = \begin{bmatrix} 4(3x^2 - 1) & 8y \\ 8y & 8x - 12y^2 \end{bmatrix}$$

Entonces
Primera matriz (Se sustituyen los valores)

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{(0,0)} \rightarrow |H| = \begin{bmatrix} 4(3x^2 - 1) & 8y \\ 8y & 8x - 12y^2 \end{bmatrix} |H| = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Para decidir si en este punto la función alcanza un extremo relativo es necesario estudiar el comportamiento de la función alrededor del punto:

$$f(x,y) - f(0,0) = f(x,y) - 0 = x^4 + y^4 - 2(x - y^2)^2 = \begin{cases} -y^4 < 0, si\ x = 0\ e\ y \neq 0 \\ y^8 + y^4 > 0, si\ x = y^2 \text{ e } y \neq 0 \end{cases}$$

De donde se deduce que en $(0,0)$ no alcanza un extremo relativo (es un punto de silla).

Segunda matriz (Se sustituyen los valores)

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{(0,0)} \rightarrow |H| = \begin{bmatrix} 4(3x^2 - 1) & 8y \\ 8y & 8x - 12y^2 \end{bmatrix} |H| = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 64 \ < 0 \text{ y } f_{xx} = 8 > 0$$

$$\text{entonces concluimos que } (1,0) \text{ hay un valor mínimo para la función, y es } f_{Mín}(1,0) = (1)^4 + (0)^4 - 2(1 - 0^2)^2 = -1$$

Segunda matriz (Se sustituyen los valores)

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}_{(0,0)} \rightarrow |H| = \begin{bmatrix} 4(3x^2 - 1) & 8y \\ 8y & 8x - 12y^2 \end{bmatrix} |H| = \begin{vmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} = -64 \ <$$

0 concluimos que en $(-1,0)$ hay un punto de silla

5.5. Casos de optimización

1. Un fabricante de artículos electrónicos determina que los beneficios obtenidos con la fabricación de x unidades de un reproductor DVD e y unidades de un grabador de DVD vienen dados por la función.

$$P(x,y) = 8x + 10y - 0{,}001(x^2 + xy + y^2) - 10000\ €$$

¿Cuántas unidades debe fabricar de cada producto para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál es?

Se buscan los puntos críticos candidatos a ser extremos; las derivadas parciales son:

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{x}} = 8 - 0{,}001(2\mathrm{x}+\mathrm{y}); \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{y}} = 10 - 0{,}001(\mathrm{x}+2\mathrm{y})$$

Igualamos a 0 el sistema

$$\begin{cases} 8 - 0{,}001(2\mathrm{x}+\mathrm{y}) = 0 \to 2\mathrm{x}+\mathrm{y} = 8000 \\ 10 - 0{,}001(\mathrm{x}+2\mathrm{y}) = 0 \to \mathrm{x}+2\mathrm{y} = 10000 \end{cases} \to \begin{cases} \mathrm{x} = 2000 \\ \mathrm{y} = 4000 \end{cases}$$

Clasificamos dichos puntos críticos. Las segundas derivadas parciales son:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial \mathrm{x}^2} = -0{,}002, \frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial \mathrm{y}^2} = -0{,}002; \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}} = -0{,}001, \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}} = -0{,}001$$

Por tanto, en este caso la matriz Hessiana resulta:

$$\mathrm{H} = \begin{bmatrix} \mathrm{P_{xx}} & \mathrm{P_{xy}} \\ \mathrm{P_{yx}} & \mathrm{P_{yy}} \end{bmatrix}_{(0,0)} \to \mathrm{H} = \begin{bmatrix} -0{,}002 & -0{,}001 \\ -0{,}001 & -0{,}002 \end{bmatrix}$$

Puesto que $3 \cdot 10^{-6} = |\mathrm{H}| > 0\ y\ \mathrm{P_{xx}} = -0{,}002 < 0$, concluimos que en $P(2000{,}4000)$ hay un valor máximo para la función que sería:

$$\mathrm{P_{Máx}}(2000{,}4000) = 8(2000) + 10(4000) - 0{,}001((2000)^2 + 2000 \cdot 4000 + (4000)^2) - 10000 = 18000$$

Por tanto, el máximo de la función se alcanza en el punto $(2000{,}4000)$ y su valor es 18000. Traducido al contexto del problema, el máximo beneficio es de 18000 € y se alcanza cuando se fabrican 2000 reproductores y 4000 grabadoras.

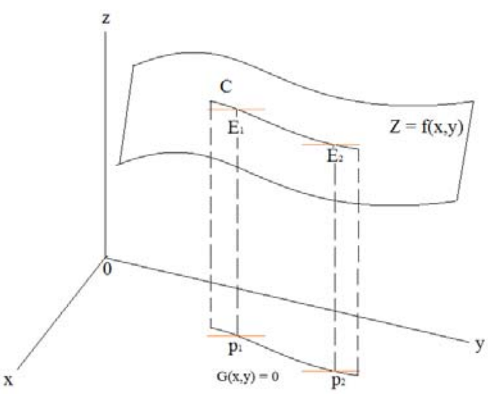
6. Extremos condicionados o ligados

Extremos condicionados

Muchos problemas de optimización requieren la obtención de algún extremo $(Máx\ o\ Mín)$ absoluto de cierta función f, llamada función objetivo, que está definida sobre variables que deben verificar ciertas condiciones, dadas por medio de ecuaciones, llamadas restricciones o ligaduras.

Estos extremos se llaman extremos condicionados y se resuelven por el método relativo de Lagrange.

Extremos condicionados: Función de dos variables y una ligadura



La figura nos muestra una interpretación geométrica de cómo el problema de obtener los extremos relativos de la función de dos variables de $f(z,y)$ y $f(x,y)$, cuyas variables están ligadas por una ligadura $G(x,y)=0$ se reduce a hallar los extremos relativos de la curva C, intersección de la superficie $z=f(x,y)$ con la superficie cilindro de $g(x,y)=0$ de los extremos relativos de C van a ser:

$$C=\begin{cases} z=f(x,y) \\ G(x,y)=0 \end{cases}$$

Este problema se puede resolver de dos formas:

1ª Forma: Se resuelve la ecuación de $G(x,y)=0$ para una de las variables, por ejemplo, se despeja $y=h(x)$ y se sustituye en el resultado de f, obteniéndose una función de una sola variable $f \to z = f\big(x,h(x)\big)$. La función obtenida se maximiza o minimiza por el método que conocemos de una variable.
2ª Forma: Métodos multiplicadores de Lagrange

1er Paso: Se introduce una variable auxiliar "λ" (lagrangiana) y se considera la denominada función de Lagrange.

$$\mathrm{L}(\mathrm{x},\mathrm{y},\lambda)=\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})+\lambda\mathrm{G}(\mathrm{x},\mathrm{y})$$

2º Paso: Se calcula los puntos críticos de $\mathrm{L}(\mathrm{x},\mathrm{y},\lambda)$ resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\mathrm{L}(\mathrm{x},\mathrm{y},\lambda)\begin{cases} \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{x}}=\dfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x},\mathrm{y})+\lambda\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial \mathrm{x}}(\mathrm{x},\mathrm{y})=0 \\ \dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{y}}=\dfrac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}}(\mathrm{x},\mathrm{y})+\lambda\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial \mathrm{y}}(\mathrm{x},\mathrm{y})=0 \\ \qquad\dfrac{\partial \mathrm{L}}{\partial \mathrm{y}}=\mathrm{G}(\mathrm{x},\mathrm{y})=0 \end{cases}$$

Conclusión:
Los máximos y mínimos solución del problema pertenecen al conjunto de puntos (x,y) solución del sistema del paso anterior.

3er Paso: Conocidas las soluciones del sistema del paso 2, se determinará si son máximos o mínimos de dos formas distintas (según la naturaleza del sistema).

1ª Forma: Calculamos el Hessiano de la ecuación de Lagrange

$$\mathrm{L}(\mathrm{x},\mathrm{y},\lambda)=\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{y})+\lambda\mathrm{G}(\mathrm{x},\mathrm{y})$$

En los puntos críticos (x_0,y_0) calculados en el paso 2. De manera que queda una matriz de esta forma.

$$H_L(x_0,y_0)=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial \mathrm{x}^2}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial \mathrm{x}\,\partial \mathrm{y}}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial \mathrm{y}\,\partial \mathrm{x}}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial \mathrm{y}^2}(x_0,y_0) \end{vmatrix}>0$$

$\frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial \mathrm{x}_0}(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0)>0$ en (x_0,y_0) hay mínimos condicionados
$\frac{\partial^2 \mathrm{L}}{\partial \mathrm{x}^2}(\mathrm{x}_0,\mathrm{y}_0)<0$ en (x_0,y_0) hay máximos condicionados
Solo estos dos casos, si no se pudiera por esto se aplicaría otro método
2ª Forma: Valorando la función en los puntos críticos (x_0,y_0) obtenidos en el Paso 2. El valor mayor y el menor valor obtenidos dan el máximo y el mínimo de f, respectivamente, condicionando a la ligadura.

Extremos condicionados: Función de 3 variables y 1 ó 2 ligaduras

Para hallar el extremo absoluto de una función de $f(x,y,z)$ sometida a las restricciones $G_1(x,y,z)=0$ y $G_2(x,y,z)=0$ utilizaremos el método de la matriz de Lagrange.

1er Paso: Se considera la denominada ecuación de Lagrange

$$L(x,y,z,\lambda) - f(x,y,z) + \lambda G_1(x,y,z) + \lambda G_2(x,y,z)$$

<u>2º Paso</u>: Se calculan los puntos críticos resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones $L(x,y,z)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + \lambda_1 \dfrac{\partial G_1}{\partial x}(x,y,z) + \lambda_2 \dfrac{\partial G_2}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + \lambda_1 \dfrac{\partial G_1}{\partial y}(x,y,z) + \lambda_2 \dfrac{\partial G_2}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = G_1(x,y,z) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = G_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

<u>3er Paso</u>: Para no complicar el problema, en este caso, conocidas las soluciones del sistema (Paso 2), se determinará si son máximos o mínimos evaluándolas en la función $f(x,y,z)$. El valor mayor y el menor valor obtenido serán el máximo y el mínimo de f, respetivamente, condicionados a las ligaduras.
Determina los valores máximos y mínimos absolutos de la función

$$F(x,y,z,\lambda) = (x - 2y + 5z) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 30)$$

$$\begin{array}{l} \dfrac{\partial L}{\partial x} \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} \\ G(x,y,z,\lambda) \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{r} 1 + 2\lambda x = 0 \\ -2 + 2\lambda y = 0 \\ 5 + 2\lambda z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 0 \end{array} \right\rangle \quad \begin{array}{l} x = \dfrac{-1}{2\lambda} \\ y = \dfrac{1}{\lambda} \\ z = \dfrac{-5}{2\lambda} \end{array} \quad \begin{array}{llll} \lambda = \dfrac{1}{2} & x = -1 & y = 2 & z = 5 \\ \lambda = \dfrac{-1}{2} & x = 1 & y = -2 & z = 5 \end{array}$$

$$\mathrm{f}(-1,2,-5) = -30 \text{ mín}$$
$$\mathrm{f}(1,-2,5) = 30 \text{ máx}$$