

# **PRÁCTICA N° 1**

**Determinación de leyes de esfuerzos y deformaciones de sencillas estructuras discretas mediante el programa MEFI.**

Titulación: GRADO EN INGENIERÍA DE LAS INDUSTRIAS AGROALIMENTARIAS Y GRADO EN INGENIERÍA DE LA HORTOFRUTICULTURA Y JARDINERÍA.

Curso: 2º.

Asignatura: CÁLCULO DE ESTRUCTURAS Y CONSTRUCCIÓN

Profesores: Gloria Martínez Marí

Juan Antonio Nicolás Cuevas

## ÍNDICE

- 1 Notas informativas sobre las prácticas
- 2 Objetivos
- 3 Medios
- 4 Descripción
- 5 Anexo nº 1 Introducción al manejo de MEFI
- 6 Anexo nº 2 Ejemplo practico

## 1 NOTAS INFORMATIVAS SOBRE LAS PRÁCTICAS

La realización de las prácticas es obligatoria, por lo que deberá entregarse antes de la realización de examen.

La asistencia al aula de informática no es obligatoria, aunque si recomendable. Las prácticas han de aprobarse y promediaran un 20% respecto a la nota final de la asignatura

## 2 OBJETIVOS

Los objetivos de la presente práctica son:

- Familiarizar al alumno con el manejo de un programa de análisis estructural. MEFI
- Familiarizar al alumno con el manejo y uso del prontuario
- Proporcionar unas herramientas de comprobación de resultados de ejercicios sencillos

## 3 MEDIOS

- o Ordenador
- o Software (MEFI)
- o Prontuario
- o Apuntes de clase

## 4 DESCRIPCIÓN

Esta práctica tiene dos fases claramente diferenciadas.

En la primera, se dará a conocer al alumno el manejo de MEFI (mediante la resolución de ejemplos)

En la segunda fase, se propondrá al alumno ejemplos del prontuario para que lo calcule con MEFI, y posteriormente emita un informe resumen de la práctica, tal y como se le propone en el anejo nº 2.

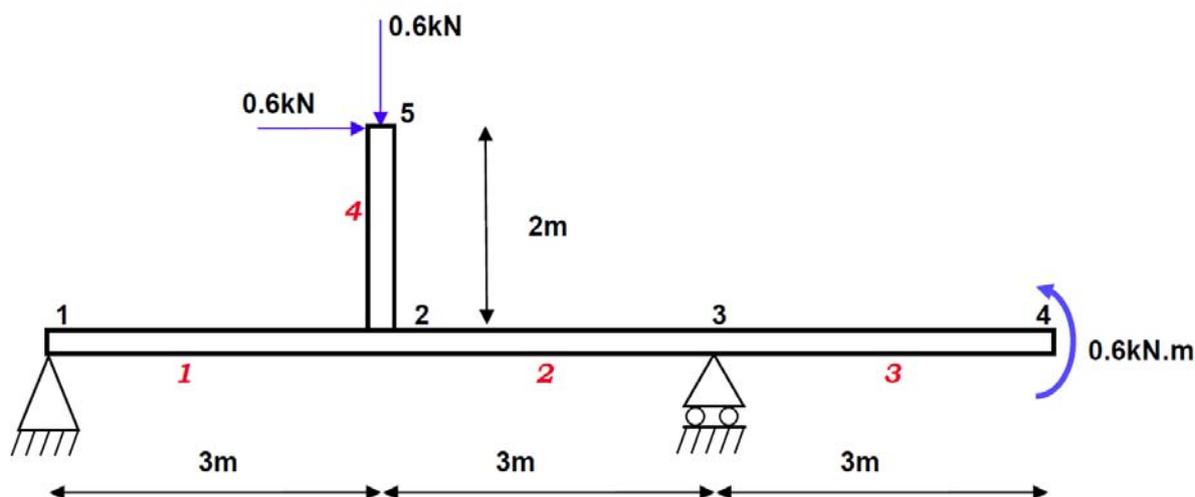
## 5 ANEXO N° 1 INTRODUCCIÓN AL MANEJO DE MEFI.

### 5.1 INTRODUCCIÓN.

A continuación se presentan las instrucciones básicas para la introducción y resolución de problemas mediante el software de análisis de estructuras MEFI.

En primer lugar indicar que el propio programa dispone de un archivo de ayuda, en el cual se pueden ampliar todos los detalles que a continuación se enumeran.

La sintaxis del programa se describe a través de la introducción de la estructura representada en la siguiente figura.



Es importante la elección de un sistema de coordenadas adecuado para el problema que se va a resolver. En este caso se ha tomado un origen de coordenadas en el apoyo 1 de forma que el eje OX coincide con el eje local "x" de la viga 1-4

Por otro lado, hay que establecer un sistema de unidades para la introducción de los datos del enunciado, ya que el software no interpreta los datos. Se recomienda recurrir a kN para las fuerzas y a m para las dimensiones.

La pantalla de MEFI se compone de una barra de menús y una barra de herramientas con los iconos para las funciones más habituales en su parte superior. El entorno gráfico se divide en tres ventanas:

- La ventana superior izquierda es la de entrada de datos;
- La ventana superior derecha es la de representación gráfica;
- La ventana inferior es la de presentación de resultados

La sintaxis completa a introducir en la ventana de entrada de datos es la siguiente.

Para ello nos ayudaremos del menú "Plantillas", y seguiremos los distintos apartados del mismo.

## 5.2 TÍTULO

Este primer apartado nos sirve para la identificación del problema/estructura que estamos resolviendo.

TITULO EJEMPLO PROPUESTO N° 3

## 5.3 PARÁMETROS

Este apartado es de gran importancia, para el manejo y modificación de los datos de un problema, con el fin de poder, de un modo muy sencillo, obtener variaciones de un modelo.

Se definirán tantos parámetros como se considere necesario, no siendo obligatorio su uso. En nuestro caso se han definido los siguientes.

```
PARAMETROS
$ par val
L1 3.0      $ m
L2 2.0      $ m
E 210.0e6  $ kPa
A 28.5e-4   $ m2
I 0.194e-4  $ m4
P1 0.6      $ kN
P2 0.6      $ kN
M 0.6      $ kN.m
```

Como se puede ver, a modo de comentario, se indica en esta entrada de datos las unidades de los distintos parámetros. La información que sigue al símbolo "\$" no es leída por el programa, como se indicaba, el software no interpreta los datos.

## 5.4 DEFINICIÓN DE LA GEOMETRÍA DEL PROBLEMA

Para definir la geometría de cualquier estructura hay que definir las coordenadas de todos los nudos de la misma (puntos), siendo consecuente con el sistema de coordenadas establecido.

```
PUNTOS
$ pun X      Y
1 0.0        0.0
2 L1         0.0
3 2*L1       0.0
4 3*L1       0.0
5 L1         L2
```

Una vez definida la posición de los nudos, hay que pasar a describir la disposición de las barras de la estructura (LINEAS)

```
LINEAS
$ lin tipo  pun
1 POL      1 2
2 POL      2 3
3 POL      3 4
4 POL      5 2
```

Si en vez de líneas rectas (POL) tenemos líneas circulares la acción sería ARC.

## 5.5 MATERIALES Y PROPIEDADES DE LAS SECCIONES

Tras la definición geométrica, pasamos a definir las propiedades de los materiales a utilizar, y las propiedades de las secciones de las barras de nuestra estructura.

Un programa de análisis de estructuras necesita el dimensionado completo de todos los elementos de la misma para poder realizar los cálculos. Precisamente, ante una situación de diseño, esto lo que desconocemos ya que se parte de cero. Para la estructura propuesta se ha supuesto un perfil con un área "A" e inercia "I" determinados (ver apartado parámetros)

```
MATERIALES
$  mat pro1 val1
   1  YOU  E

PROPIEDADES
$  pro val1  val2
   1  A      I

ELEMENTOS_LINEAS
$  lin tipo  mat pro
   1:4 RIG  1  1
```

Como se puede ver en la sintaxis anterior, se define un único tipo de material (Acero), un único tipo de sección (coincide con los datos de un IPE200), y se asigna este material y esta sección (PROPIEDADES) a todas las barras de la estructura (LINEAS)

A la hora de asignar las propiedades y materiales a las líneas de la estructura, se define tipo de unión en los extremos de cada barra de la estructura. En este caso se ha definido como "RIG", lo que significa, que todas las barras se unen rígidamente entre sí en los nudos de la estructura, por lo que habrá transmisión de esfuerzos axiales, cortantes y flectores.

Este caso se diferencia de las barras articuladas con rótulas, cuya acción es ART, en que estas últimas no transmiten flectores de una barra a otra.

También se puede dar el caso de una barra que sale de un nudo rígido y que va a otro articulado, en este caso la acción es RIG\_ART.

## 5.6 APOYOS DE LA ESTRUCTURA

La definición de los apoyos de la estructura se hace mediante la instrucción "DESPLAZAMIENTOS\_GLOBALES\_PUNTOS"

```
DESPLAZAMIENTOS_GLOBALES_PUNTOS
$  pun est DX  DY  GZ
   1  1  0.0  0.0  LIBRE
   2  1  LIBRE 0.0  LIBRE
```

En la definición anterior se asigna a los puntos no incluidos (nudos), libertad de movimiento (desplazamiento/giro) en el plano.

## 5.7 CARGAS

Por último hay que definir las cargas que se aplican a la estructura, para ello, se definen:

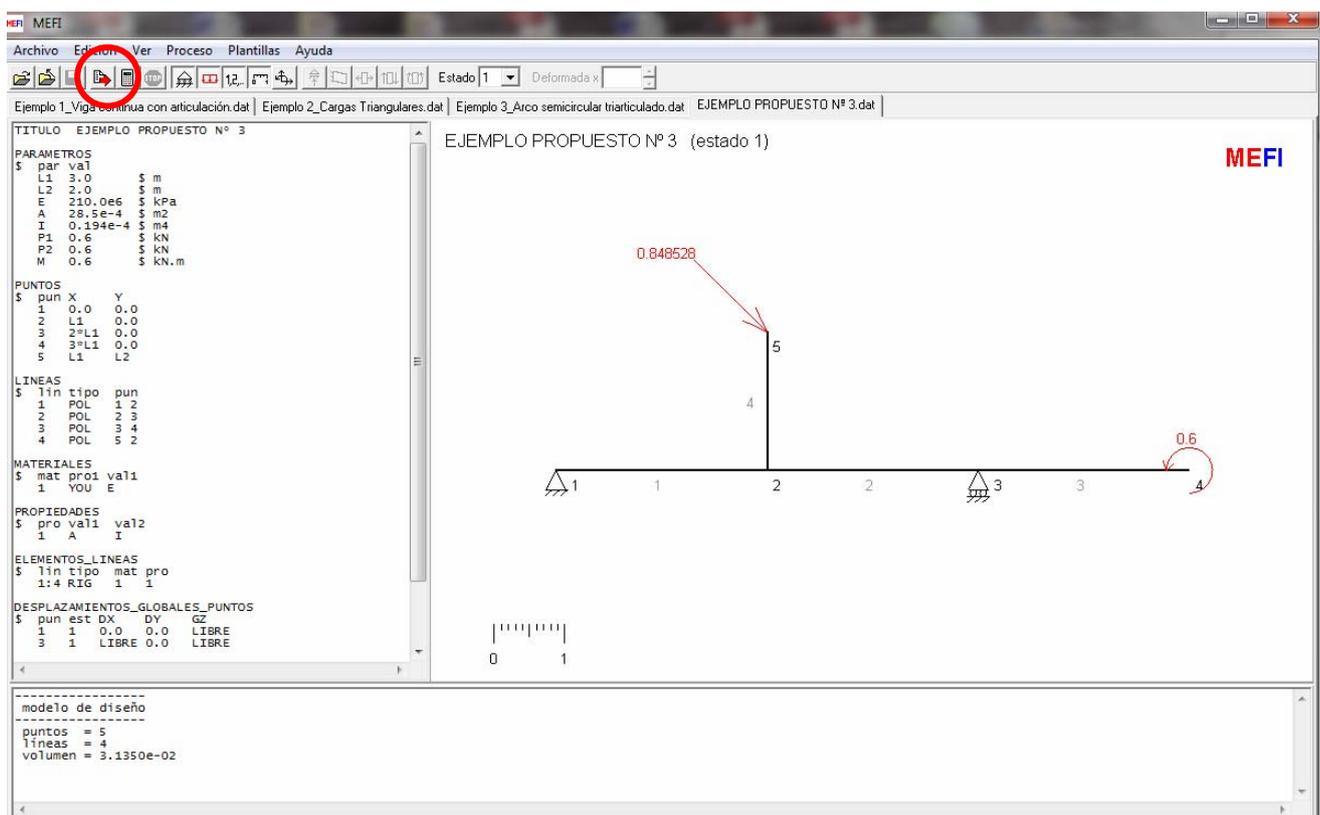
- Las cargas que se aplican sobre los nudos de la estructura (PUNTOS) y
- Las cargas que se aplican sobre las barras de la estructura (LINEAS).

En nuestro caso únicamente tenemos cargas aplicadas en los nudos, por lo que la definición es:

```
CARGAS_GLOBALES_PUNTOS
$ pun est FX    FY    MZ
    5   1   P1   -P2   0.0
    4   1   0.0   0.0   M
```

Como se puede observar, el programa realiza la transformación de las cargas definidas, utilizando la resultante de las mismas en cada caso.

Una vez definidos todos los datos, el icono "ACTUALIZAR" (situado el cuarto por la izquierda en la barra de herramientas) representa el enunciado descrito en la ventana de gráficos.

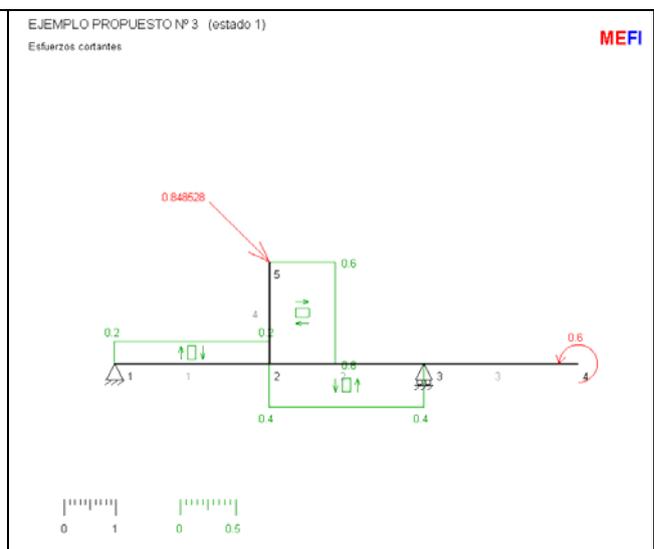
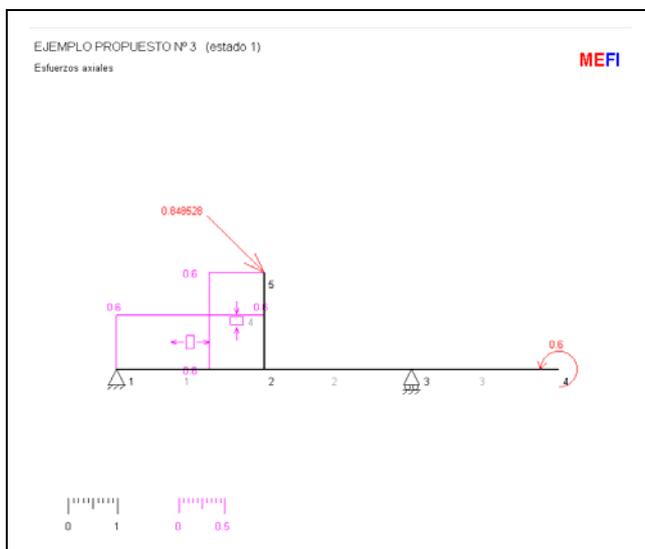
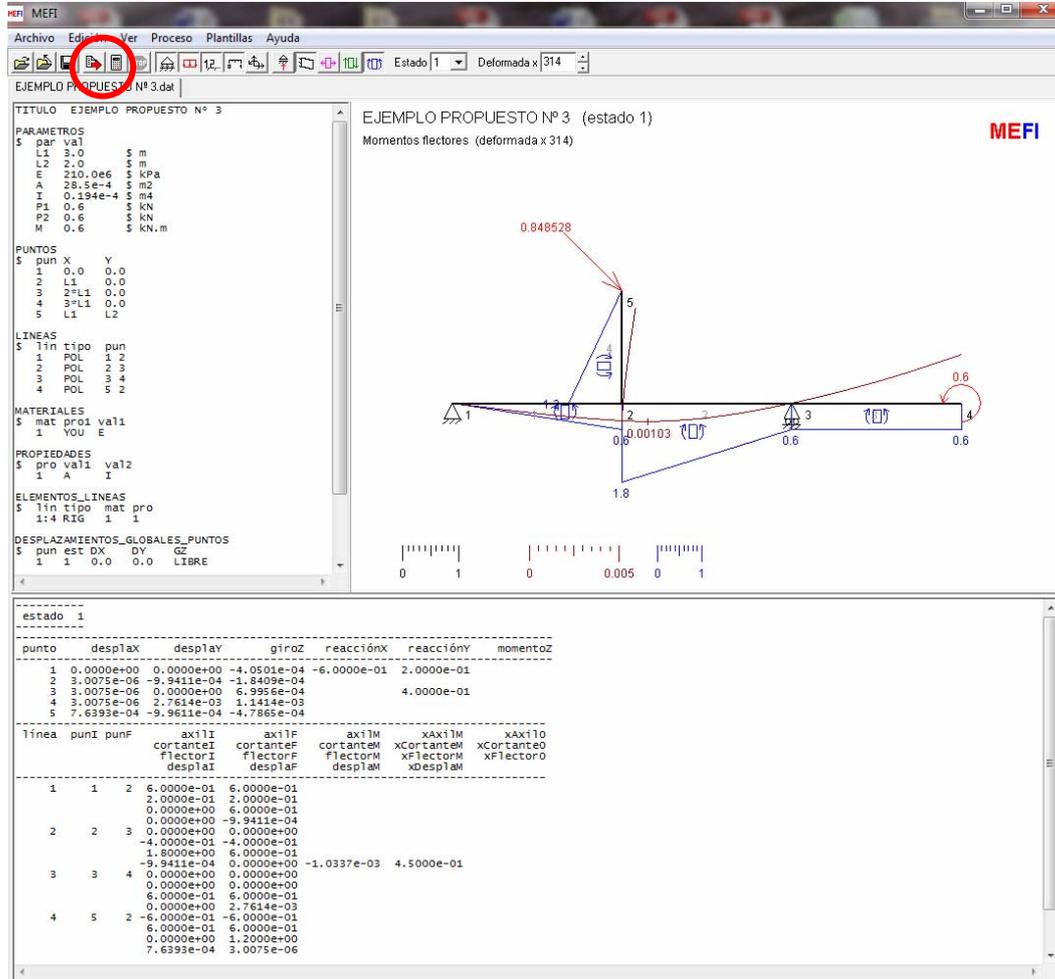


Tras actualizar vemos que en la ventana de resultados aparecen unos datos del diseño:

- Número de PUNTOS =5 (es decir, el número de nudos de la estructura)
- Número de LINEAS =4 (es decir, el número de barras de la estructura)
- Volumen = 3.135e-2, y puesto que hemos introducido las unidades en metros, este interesante apartado nos devuelve la medición de la estructura, (3.135e-2 m<sup>3</sup> de acero, que multiplicado por la densidad 7.850 kg/m<sup>3</sup> equivale a 246 kg de acero)

### 5.8 CALCULAR

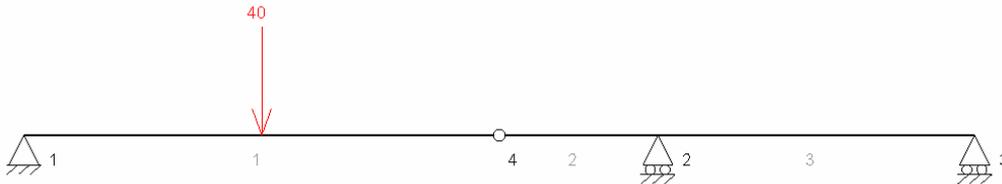
Por último queda calcular la estructura y analizar los resultados. Pulsando sobre el icono "CALCULAR", situado a la derecha del icono "ACTUALIZAR", MEFI realiza los cálculos y nos muestra gráfica y numéricamente los resultados.



### Ejemplo 2: viga con una rotula

Viga continua con articulación (estado 1)

MEFI



#### ENTRADA DE DATOS

TITULO Viga continua con articulación

PUNTOS

| \$ | pun | X    | Y   |
|----|-----|------|-----|
|    | 1   | 0.0  | 0.0 |
|    | 2   | 8.0  | 0.0 |
|    | 3   | 12.0 | 0.0 |
|    | 4   | 6.0  | 0.0 |

LINEAS

| \$ | lin | tipo | pun |
|----|-----|------|-----|
|    | 1   | POL  | 1 4 |
|    | 2   | POL  | 4 2 |
|    | 3   | POL  | 2 3 |

MATERIALES

| \$ | mat | pro1 | vall    |
|----|-----|------|---------|
|    | 1   | YOU  | 210.0e6 |

PROPIEDADES

| \$ | pro | are | iner     |
|----|-----|-----|----------|
|    | 1   | 1.0 | 800.0e-8 |

ELEMENTOS\_LINEAS

| \$ | lin | tipo    | mat | pro |
|----|-----|---------|-----|-----|
|    | 1   | RIG_ART | 1   | 1   |
|    | 2,3 | RIG     | 1   | 1   |

DESPLAZAMIENTOS\_GLOBALES\_PUNTOS

| \$ | pun | est | DX  | DY  | GZ  |
|----|-----|-----|-----|-----|-----|
|    | 1   | 1   | 0.0 | 0.0 | LIB |
|    | 3   | 1   | LIB | 0.0 | LIB |
|    | 2,3 | 1   | LIB | 0.0 | LIB |

CARGAS\_GLOBALES\_LINEAS

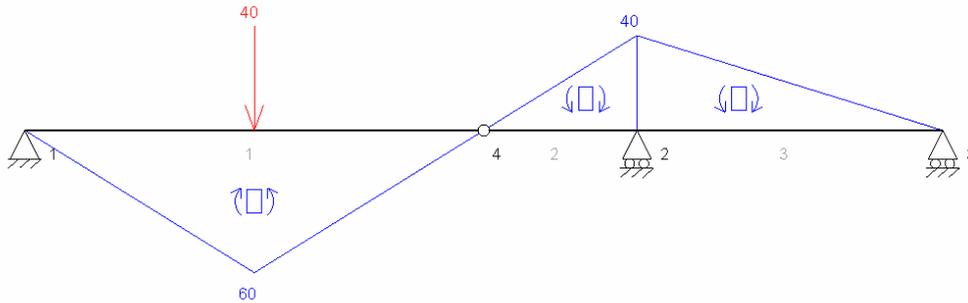
| \$ | lin | est | tipo | pX  | pY  | MZ  | dI  |
|----|-----|-----|------|-----|-----|-----|-----|
|    | 1   | 1   | PUN  | 0.0 | -40 | 0.0 | 3.0 |

## GRÁFICOS

Viga continua con articulación (estado 1)

Momentos flectores

MEFI

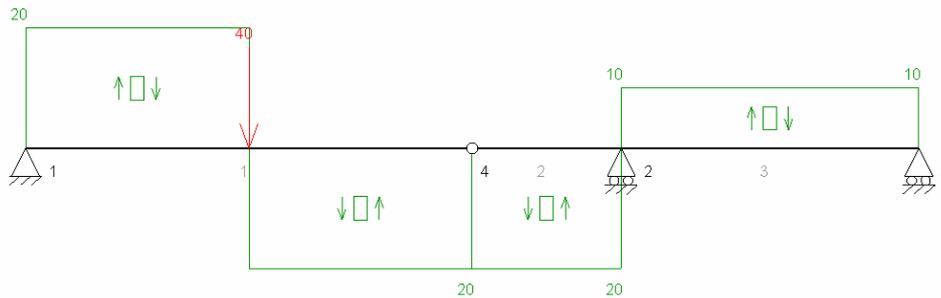


**\*Observad que en la rotula el momento es nulo**

Viga continua con articulación (estado 1)

Esfuerzos cortantes

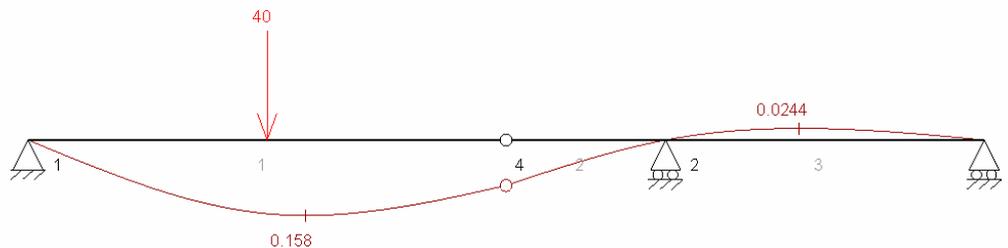
MEFI



Viga continua con articulación (estado 1)

Deformada x 6

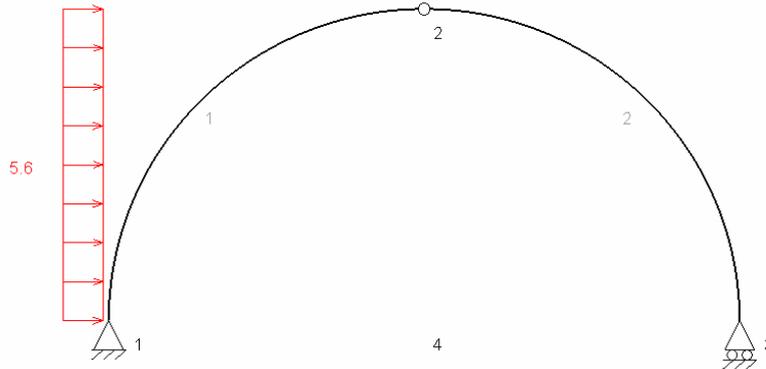
MEFI



### Ejemplo 3. Viga circular con rotula y con varios estados de carga:

Arco semicircular triarticulado (estado 1)

MEFI



#### ENTRADA DE DATOS

TITULO Arco semicircular triarticulado

PUNTOS

```
$ pun X      Y
   1  -15.0   0.0
   2   0.0   15.0
   3  15.0   0.0
   4   0.0   0.0
```

LINEAS

```
$ lin tipo  pun
   1  ARC   4 2 1
   2  ARC   4 3 2
```

MATERIALES

```
$ mat pro1 val1
   1  YOU 210.0e6
```

PROPIEDADES

```
$ pro val1  val2
   1   1.0   1.0e-4
```

ELEMENTOS\_LINEAS

```
$ lin  tipo      mat  pro
   1   ART_RIG   1    1
   2    RIG      1    1
```

DESPLAZAMIENTOS\_GLOBALES\_PUNTOS

```
$ pun est DX    DY    GZ
   1,3  0  0.0  0.0  LIB
```

CARGAS\_GLOBALES\_LINEAS

```
$ lin  est tipo  pX    pY    dI    dF
   1   1  UNI  5.6   0.0
   1,2  2  UNI  0.0  -8.0
```

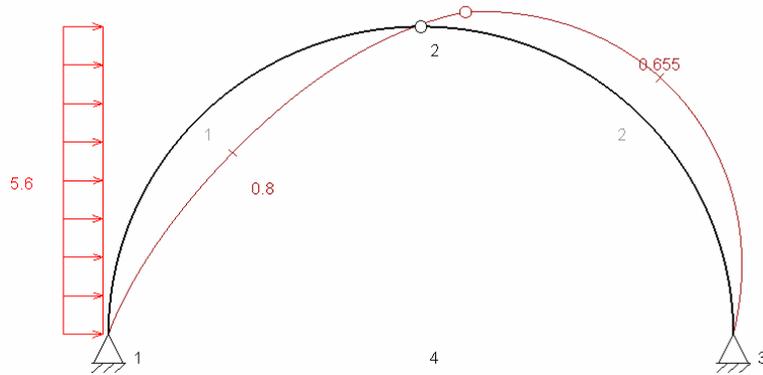
COMBINACIONES\_ESTADOS\_CARGAS

```
$ estc est1 coef1 est2 coef2
   3   1   1.0   2   1.0
```

**GRÁFICOS**

Arco semicircular triarticulado (estado 1)

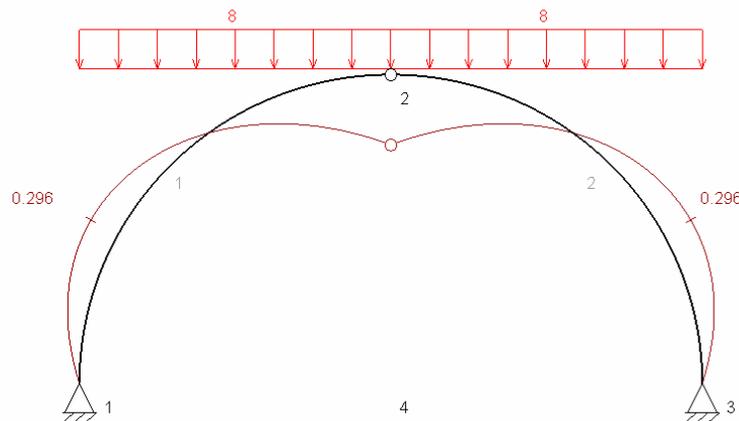
Deformada x 3



MEFI

Arco semicircular triarticulado (estado 2)

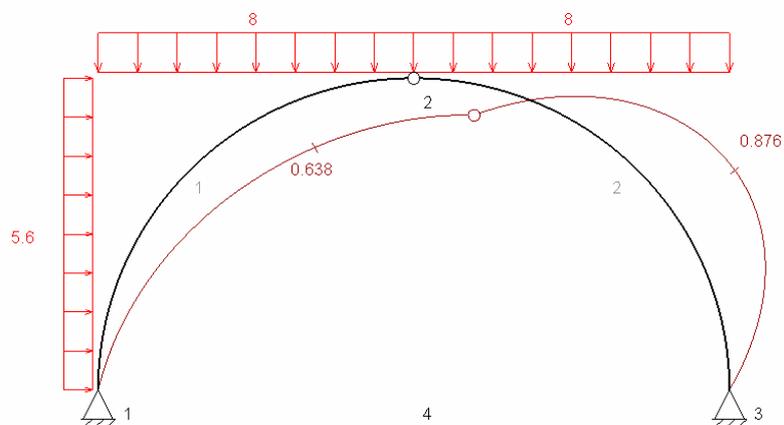
Deformada x 5



MEFI

Arco semicircular triarticulado (estado 3)

Deformada x 4

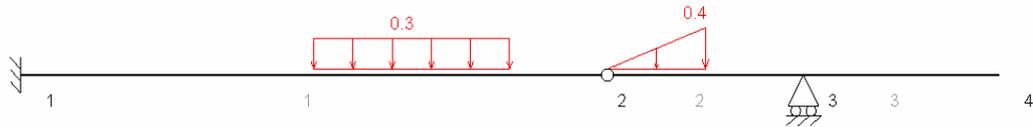


MEFI

## Ejemplo 4: Cargas triangulares

Cargas triangulares (estado 1)

MEFI



### ENTRADA DE DATOS

TITULO Cargas triangulares

PARAMETROS

```
$ par val
L1 6.0 $ m
L2 2.0 $ m
q1 0.3 $ kN/m
q2 0.4 $ kN/m
A 100e-4 $ m2
I 10000e-4 $ m4
```

PUNTOS

```
$ pun X Y
1 0.0 0.0
2 L1 0.0
3 L1+L2 0.0
4 L1+2*L2 0.0
```

LINEAS

```
$ lin tipo pun
1 POL 1 2
2 POL 2 3
3 POL 3 4
```

MATERIALES

```
$ mat pro1 val1
1 YOU 201.0e6 $ kPa
```

PROPIEDADES

```
$ pro val1 val1
1 A I
```

ELEMENTOS\_LINEAS

```
$ lin tipo mat pro
1 RIG_ART 1 1
2 RIG 1 1
3 RIG 1 1
```

DESPLAZAMIENTOS\_GLOBALES\_PUNTOS

```
$ pun est DX DY GZ
1 1 0.0 0.0 0.0
```

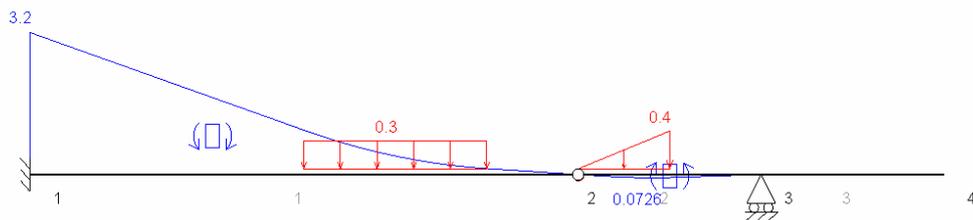
|                        |     |     |      |     |     |      |      |      |
|------------------------|-----|-----|------|-----|-----|------|------|------|
| 3                      | 1   | LIB | 0.0  | LIB |     |      |      |      |
| 4                      | 1   | LIB | LIB  | LIB |     |      |      |      |
| CARGAS_GLOBALES_LINEAS |     |     |      |     |     |      |      |      |
| \$                     | lin | est | tipo | pX  | pY  | dI   | dF   |      |
| 1                      | 1   | UNI |      | 0.0 | -q1 | L1/2 | L2/2 |      |
| 2                      | 1   | TRA |      | 0.0 | 0.0 | 0.0  | -q2  | L2/2 |

## GRÁFICOS

Cargas triangulares (estado 1)

Momentos flectores (deformada x 32767)

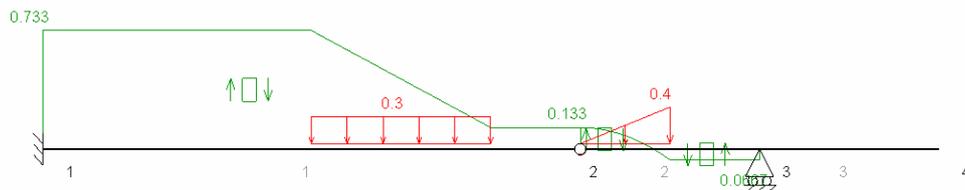
MEFI



Cargas triangulares (estado 1)

Esfuerzos cortantes (deformada x 32767)

MEFI



## 6 ANEXO N° 2 EJEMPLO PRÁCTICO.

### 6.1 EJEMPLO PRÁCTICO.

A continuación se presenta de forma codificada la definición del ejemplo práctico a resolver por cada uno de los alumnos.

| Tabla para la definición de los coeficientes del ejemplo práctico |                   |                    |                    |
|---|-------------------|--------------------|--------------------|
|   | A                 | B                  | C                  |
| DNI del alumno distribuido en las tres casillas                   |                   |                    |                    |
|   | <i>Dos cifras</i> | <i>Tres cifras</i> | <i>Tres cifras</i> |

#### 6.1.1 Datos

|  |   |   |  |
|--|---|---|--|
| <u>Ejemplo n° 1</u><br>$P = B/1000$ (KN)<br>$a = A/100 + 1$ (m)<br>$L = A/100 + 5$ (m)     | <u>Ejemplo n° 2</u><br>$p = C/1000$ (KN/m)<br>$a = A/100 + 1.5$ (m)<br>$b = A/100 + 2$ (m)<br>$c = A/100 + 1$ (m) | <u>Ejemplo n° 3</u><br>$p = C/1000$ (KN/m)<br>$a = A/100 + 1.5$ (m)<br>$b = A/100 + 2$ (m)                        | <u>Ejemplo n° 4</u><br>$M_a = C/1000$ (KN.m)<br>$M_b = B/1000$ (KN.m)<br>$L = A/100 + 3$ (m) |
| <u>Ejemplo n° 5</u><br>$M = C/1000$ (KN.m)<br>$a = A/100 + 1.5$ (m)<br>$b = A/100 + 2$ (m) | <u>Ejemplo n° 6</u><br>$P = B/1000$ (KN)<br>$L = A/100 + 5$ (m)   | <u>Ejemplo n° 7</u><br>$p = C/1000$ (KN/m)<br>$a = A/100 + 1.5$ (m)<br>$b = A/100 + 2$ (m)<br>$c = A/100 + 1$ (m) | <u>Ejemplo n° 8</u><br>$M = C/1000$ (KN.m)<br>$L = A/100 + 3$ (m)                            |

### 6.1.2 Presentación del informe resumen de la práctica

La fecha de entrega del informe resumen de la práctica será antes del examen.

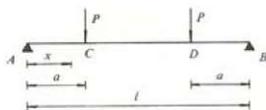
Se recomienda entregarla con antelación para poder subsanar errores.

Dicho informe incluirá:

1. Cálculo de reacciones.
  - Desarrollo de la resolución manual
  - tabla de comprobación con los resultados obtenidos: manualmente, en el MEFI y resultados del prontuario
2. Determinación de leyes de esfuerzos
  - Desarrollo de la resolución manual
  - tabla de comprobación con los resultados obtenidos: manualmente, en el MEFI y resultados del prontuario
3. Diagramas de esfuerzos
  - Desarrollo de la resolución manual, obtención de tabla con los valores característicos (máximos esfuerzos y "x" para valores nulos de los esfuerzos)
  - Gráficos obtenidos en el MEFI.
4. Dimensionamiento del perfil, de cada ejemplo, con los criterios que el alumno justificará convenientemente.
5. Hallar la flecha máxima, para los ejemplos: 1, 3 y 8.
  - Desarrollo de la resolución manual
  - tabla de comprobación con los resultados obtenidos: manualmente, en el MEFI y resultados del prontuario
6. Hallar el ángulo de giro en A, para los ejemplos: 2, 4 y 6.
  - Desarrollo de la resolución manual
  - tabla de comprobación con los resultados obtenidos: manualmente, en el MEFI y resultados del prontuario

Ejemplo nº 1

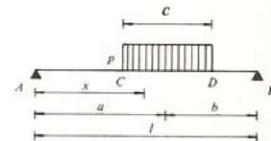
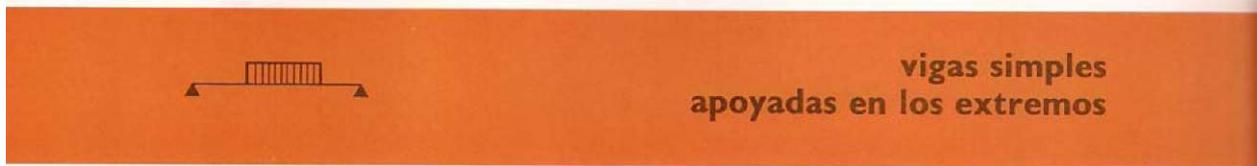
vigas simples  
apoyadas en los extremos



| Diagramas | Reacciones y solicitaciones  |
|-----------|--|
| <br>      | <p>Reacciones:</p> $R_A = R_B = P$ <p>Esfuerzos cortantes:</p> $Q_{AC} = -Q_{DB} = P = \text{const.} \quad Q_{DC} = 0$ <p>Momentos flectores:</p> $M_{AC} = Px \quad M_{DB} = P(l-x) \quad M_{\text{máx}} = M_{CD} = Pa = \text{const.}$ |

| Deformaciones  |
|--|
| <p>Ángulos de giro:</p> $\varphi_A = -\varphi_B = \frac{Pa(l-a)}{2EI} \quad \varphi_C = -\varphi_D = \frac{Pa(l-2a)}{2EI}$ <p>Ecuación de la elástica:</p> $y_{AC} = \frac{Px}{6EI} (3al - 3a^2 - x^2) \quad y_{CD} = \frac{Pa}{6EI} (3lx - 3x^2 - a^2)$ <p>Flecha máxima:</p> $f_{\text{máx}} = \frac{Pa}{24EI} (3l^2 - 4a^2) \quad \text{para } x = \frac{l}{2}$ |

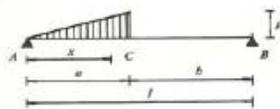
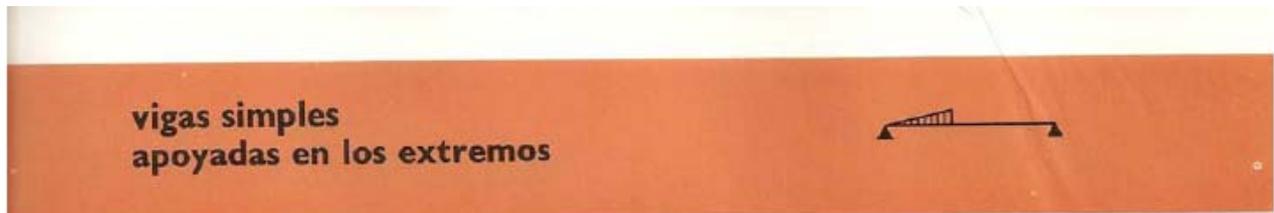
Ejemplo nº 2



| Diagramas | Reacciones y solicitaciones  |
|-----------|--|
|           | <p>Reacciones:</p> $R_A = \frac{pbc}{l} \quad R_B = \frac{pac}{l}$ <p>Esfuerzos cortantes:</p> $Q_{AC} = \frac{pbc}{l} \quad Q_{CD} = \frac{pbc}{l} - p\left(\frac{c}{2} - a + x\right) \quad Q_{DB} = -\frac{pac}{l}$ <p>Momentos flectores:</p> $M_{AC} = \frac{pbc}{l} x \quad M_{CD} = \frac{pbc}{l} x - \frac{p}{2} \left[ x - \left( a - \frac{c}{2} \right) \right]^2$ $M_{DB} = \frac{pac}{l} (l - x) \quad M_{m\acute{a}x} = \frac{pbc}{2l} \left( 2a - c + \frac{bc}{l} \right)$ <p>para <math>x_0 = a - \frac{c}{2} + \frac{bc}{l}</math></p> |

| Deformaciones   |
|---|
| <p>Ángulos de giro:</p> $\varphi_A = \frac{pabc}{6EI} \left( l + b - \frac{c^2}{4a} \right) \quad \varphi_B = -\frac{pabc}{6EI} \left( l + a - \frac{c^2}{4b} \right)$ <p>Ecuación de la elástica:</p> $y_{AC} = \frac{pbc}{6l} \frac{x}{EI} \left[ -x^2 + a \left( l + b - \frac{c^2}{4a} \right) \right]$ $y_{CD} = \frac{p}{24EI} \left( l \left[ x - \left( a - \frac{c}{2} \right) \right]^4 - 4bcx^3 + 4abc \left( l + b - \frac{c^2}{4a} \right) x \right)$ $y_{DB} = \frac{pac}{6l} \frac{l-x}{EI} \left[ -(l-x)^2 + b \left( l + a - \frac{c^2}{4b} \right) \right]$ |

Ejemplo nº 3

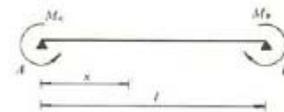


| Diagramas | Reacciones y solicitaciones  |
|-----------|--|
|           | <p>Reacciones:</p> $R_A = \frac{pa}{6l} (3l - 2a) \quad R_B = \frac{pa^2}{3l}$ <p>Esfuerzos cortantes:</p> $Q_{AC} = \frac{pa}{6l} (3l - 2a) - \frac{px^2}{2a} \quad Q_{CB} = -\frac{pa^2}{3l}$  |
|           | <p>Momentos flectores:</p> $M_{AC} = p \frac{x}{6} \left[ \left( 3 - \frac{2a}{l} \right) a - \frac{x^2}{a} \right] \quad M_{CB} = p \frac{a^2}{3} \left( 1 - \frac{x}{l} \right)$ $M_{m\acute{a}x} = p \frac{a^2}{3} \left( 1 - \frac{2a}{3l} \right) \sqrt{1 - \frac{2a}{3l}} \quad \text{para } x_0 = a \sqrt{1 - \frac{2a}{3l}}$ |

| Deformaciones  |
|--|
| <p>Angulos de giro:</p> $\varphi_A = \frac{pa^2}{360EI} (40l^2 - 45al + 12a^2) \quad \varphi_B = -\frac{pa^2l}{18EI} \left( 1 - \frac{3a^2}{5l^2} \right)$ <p>Ecuación de la elástica:</p> $y_{AC} = \frac{px}{360aEI} [3lx^4 - 10(3l - 2a)a^2x^2 + a^2(40l^2 - 45al + 12a^2)]$ $y_{CB} = -\frac{pa^2}{18EI} (l - x) \left[ (l - x)^2 - l^2 \left( 1 - \frac{3a^2}{5l^2} \right) \right]$ <p>Flecha máxima:</p> $f_{m\acute{a}x} = \frac{pa^2}{9EI} \left( \frac{l^2}{3} - \frac{a^2}{5} \right) \sqrt{\frac{l^2}{3} - \frac{a^2}{5}}$ |

Ejemplo nº 4

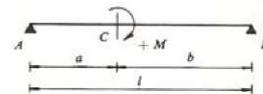
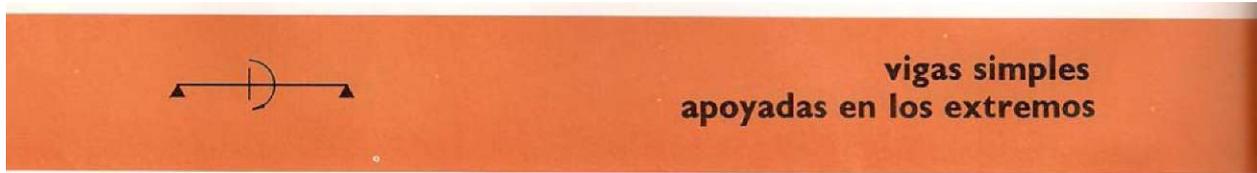
**vigas simples  
apoyadas en los extremos**



| Diagramas | Reacciones y solicitaciones  |
|-----------|--|
|           | <p><b>Reacciones:</b></p> $R_A = -R_B = \frac{M_a - M_b}{l}$   |
|           | <p><b>Esfuerzos cortantes:</b></p> $Q_x = \frac{M_a - M_b}{l} = \text{const.}$                                   |
|           | <p><b>Momentos flectores:</b></p> $M_x = -\frac{M_a}{l}(l-x) - \frac{M_b}{l}x \quad M_A = -M_a \quad M_B = -M_b$ |

| Deformaciones  |
|--|
| <p><b>Ángulos de giro:</b></p> $\varphi_A = -\frac{l}{6EI}(2M_a + M_b) \quad \varphi_B = \frac{l}{6EI}(M_a + 2M_b)$  |
| <p><b>Ecuación de la elástica:</b></p> $y_x = -\frac{M_a \cdot x}{6EI}(l-x) \left[ 1 + \frac{l-x}{l} + \frac{M_b}{M_a} \left( 1 + \frac{x}{l} \right) \right]$ |

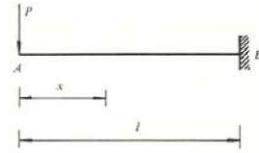
Ejemplo nº 5



| Diagramas | Reacciones y solicitaciones  |
|-----------|--|
| <br>      | <p>Reacciones:</p> $R_A = -R_B = -\frac{M}{l}$ <p>Esfuerzos cortantes:</p> $Q_x = -\frac{M}{l} = \text{const.}$ <p>Momentos flectores:</p> $M_{AC} = -\frac{M}{l}x \quad M_{CB} = \frac{M}{l}(l-x)$ $M_C^{\text{izq}} = -\frac{M}{l}a \quad M_C^{\text{der}} = \frac{M}{l}b \quad  M  =  M_C^{\text{izq}}  +  M_C^{\text{der}} $ |

| Deformaciones   |
|---|
| <p>Angulos de giro:</p> $\varphi_A = \frac{Ml}{6EI} \left( 3\frac{b^2}{l^2} - 1 \right) \quad \varphi_B = \frac{Ml}{6EI} \left( 3\frac{a^2}{l^2} - 1 \right) \quad \varphi_C = \frac{M}{3EI l^2} (a^3 + b^3)$ <p>Ecuación de la elástica:</p> $y_{AC} = -\frac{Mlx}{6EI} \left( 1 - 3\frac{b^2}{l^2} - \frac{x^2}{l^2} \right) \quad y_{BC} = \frac{Ml(l-x)}{6EI} \left[ 1 - 3\frac{a^2}{l^2} - \left( \frac{l-x}{l} \right)^2 \right]$ <p>Flecha:</p> $f_C = -\frac{Mab}{3EI} (b-a)$ |

Ejemplo nº 6



| Diagramas | Reacciones y solicitaciones  |
|-----------|--|
| <br>      | <p>Reacciones:</p> $R_B = P$ <p>Esfuerzos cortantes:</p> $Q_B = Q_x = -P = \text{const.}$ <p>Momentos flectores:</p> $M_x = -Px \quad M_B = -Pl$ |

| Deformaciones   |
|---|
| <p>Angulos de giro:</p> $\varphi_A = -\frac{Pl^2}{2EI}$ <p>Ecuación de la elástica:</p> $y_x = \frac{P}{6EI} (l-x)^2(2l+x)$ <p>Flecha:</p> $f_A = \frac{Pl^3}{3EI}$ |

Ejemplo nº 7

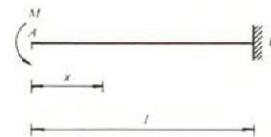


| Diagramas | Reacciones y solicitaciones   |
|-----------|---|
|           | <p><b>Reacciones:</b></p> $R_B = pc$ <p><b>Esfuerzos cortantes:</b></p> $Q_{AC} = 0 \quad Q_{CD} = -p \left( x - a + \frac{c}{2} \right) \quad Q_{DB} = -pc = \text{const.}$ <p><b>Momentos flectores:</b></p> $M_{AC} = 0 \quad M_{CD} = -\frac{p}{2} \left( x - a + \frac{c}{2} \right)^2 \quad M_D = -\frac{pc^2}{2}$ $M_{DB} = -pc(x - a) \quad M_B = -pcb$ |

| Deformaciones  |
|--|
| <p><b>Angulos de giro:</b></p> $\varphi_D = -\frac{pc}{2EI} \left( b^2 - \frac{c^2}{4} \right) \quad \varphi_C = -\frac{pc}{2EI} \left( b^2 + \frac{c^2}{12} \right) \quad \varphi_A = \varphi_C$ <p><b>Ecuación de la elástica:</b></p> $y_{DB} = \frac{pc}{6EI} (l-x)^2 (2b-a+x) \quad y_{DC} = \frac{p}{24EI} \left[ \left( x - a + \frac{c}{2} \right)^4 + 4c(a-x) \left( 3b^2 + \frac{c^2}{4} \right) + 8b^3c \right]$ $y_{AC} = \frac{pc}{6EI} \left[ (a-x) \left( 3b^2 + \frac{c^2}{4} \right) + 2b^3 \right]$ <p><b>Flechas:</b></p> $f_D = \frac{pc}{EI} \left( b - \frac{c}{2} \right)^2 \left( \frac{b}{3} + \frac{c}{12} \right) \quad f_C = -\frac{pc}{12EI} \left[ \left( b + \frac{c}{2} \right)^2 (4b-c) + c^3 \right]$ $f_A = \frac{pc}{6EI} \left[ a \left( 3b^2 + \frac{c^2}{4} \right) + 2b^3 \right]$ |

Ejemplo nº 8

vigas simples en voladizo



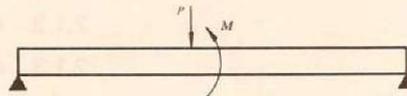
| Diagramas | Reacciones y solicitaciones  |
|-----------|--|
|           | <p>Reacciones:</p> $R_B = 0$ <p>Esfuerzos cortantes:</p> $Q_x = 0$ <p>Momentos flectores:</p> $M_x = M_B = -M = \text{const.}$ |

| Deformaciones   |
|---|
| <p>Angulos de giro:</p> $\varphi_A = -\frac{MI}{EI}$ <p>Ecuación de la elástica:</p> $y_x = -\frac{M}{2EI} (x^2 - 2lx + l^2)$ <p>Flecha:</p> $f_A = \frac{Ml^2}{2EI}$ |

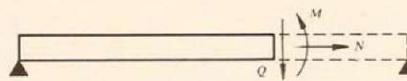
## vigas convenio de signos

Se considerarán como sentidos positivos de las acciones exteriores, esfuerzos, reacciones, giros y corrimientos, los indicados en las respectivas figuras.

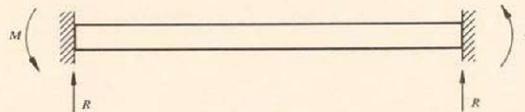
ACCIONES EXTERIORES



ESFUERZOS EN UNA SECCION DE LA VIGA



REACCIONES



GIROS



FLECHAS

