FINAL JUNIO
2011/2012

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA
DE CARTAGENA

Dpto. de Matemática Aplicada y Estadística

Matemáticas e Informática (09-07-2012). Examen Final

Hola, antes de empezar a hacer los problemas léelos, pues da igual el orden en que los hagas. Recuerda que en cada problema tienes que hacer como mínimo las siguientes partes: planteamiento, desarrollo y conclusión. Es obligatorio que entreges esta hoja del examen (si la quieres, ven a pedírmela en tutorías).
Suerte!!

Nombre:

PARTE 1

Para los que tengan que elegir, deben de hacer 2 ejercicios de los 4

1. Calcula una expresión de las potencias A^n de la matriz. Utiliza Gauss-Jordan para el cálculo de la inversa.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. *a*) En $\mathbb{R}^4$ se considera el subespacio vectorial U generado por $U = \{(1,-1,1,-1),(1,1,0,1),(1,2,-1,2)\}$. Calcula las proyecciones sobre U y $U^{\perp}$ del vector $(3,2,1,4)$, (da una base, unas ecuaciones cartesianas y dimensión de U y $U^{\perp}$).

   b) Considerando los subespacios de $\mathbb{R}^3$ dados por

$$W \equiv \left\{ \begin{array}{c} x+y+z=0 \\ z=0 \end{array} \right. \qquad V \equiv \left\{ \begin{array}{c} x=\lambda+\gamma \\ y=\mu+\gamma \\ z=\lambda+\mu+2\gamma \end{array} \right.$$

   Da una base, unas ecuaciones cartesianas y dimensión de $W \cap V$ y $W+V$.

3. Es posible una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$ cuya imagen esté engendrada por $Im(f) =< (-1,1,0,2),(1,1,-1,3) >$ y cuyo núcleo sea $ker(f) = \{(x,y,z)/x-y=0\}$?. Justifica y razona la respuesta.

4. Discute el siguiente sistema y resuélvelo siempre que sea posible. Utiliza Gauss.

$$\left\{ \begin{array}{rcr} 2x - y + z &=& 1 \\ 2x + ay + z &=& -3 \\ 6x - y + az &=& 1 \end{array} \right.$$

PARTE 2

Para los que tengan que elegir, deben de hacer 2 ejercicios de 3, del ejercicio 5 y del 7, sólo tienen que hacer dos apartados de cada uno, pueden elegir entre $5a1, 5a2, 5b$ y $7a, 7b, 7c$

5. Escribe las fórmulas del polinomio de Taylor de orden n y del resto de Lagrange.

   a) Usa los polinomios de Taylor del grado necesario para calcular (da los polinomios de Taylor tanto del numerador como del denominador):

      1) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x - \frac{x^3}{6}}{(2\cos x + x^2e^x - 2)x^2}$.

      2) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x - \arctan x}{-x^3}$.

   b) Una función es tal que sus cuatro primeras derivadas son nulas para $x = 2$. Además, $f(2) = 3$, y $f^v(x) = 4\ \forall x \in \mathbb{R}$. Halla dicha función como aplicación del polinomio de Taylor.

6. Estudia y representa gráficamente la función $f(x) = \frac{1+x}{(1-x)^2}$.

7. *a*) Calcula $\int \frac{e^x+1}{e^x-4+4e^{-x}}dx$.

   b) Calcula $\int \frac{8x^2+6x+6}{x^3+3x^2+7x-5}dx$.

   c) Dibuja y calcula el área de la figura limitada por la curva $y^3 = x$, la recta $y = 1$ y la vertical $x = 8$.

PARTE 3

Para los que tengan que elegir, deben de hacer 2 ejercicios de los 4

8. Estudia la continuidad, diferenciabilidad y C^1 de la función

$$f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} \frac{x^3}{x^2+y^2} & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si\ (x,y) = (0,0) \end{array} \right.$$

9. Supón que la temperatura en un punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ viene dada por $T(x, y, z) = 20/(1+3x^2+y^2+2z^2)$, en donde T se mide en $°C$ y x, y, z en metros. ¿En qué dirección aumenta más rápidamente la temperatura en el punto $(2, 1, -2)$ ¿Cuál es el valor de la máxima razón de aumento?

10. Encuentra los puntos de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se encuentran más cercanos y más lejanos del punto $(3, 1, -1)$.

11. Calcula el área de la figura situada sobre el eje OX, limitada por este eje, la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x + y = 3$.