II. HIDROSTÁTICA

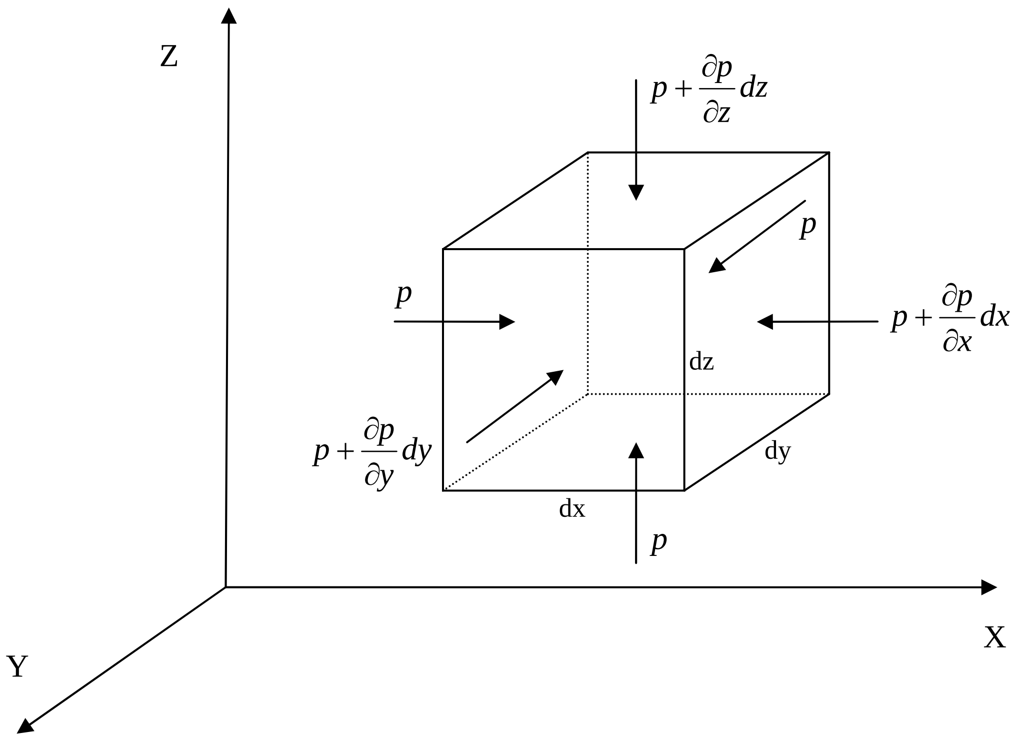
- Es la parte de la hidráulica que estudia los líquidos en reposo.

- El cálculo de los empujes hidrostáticos ejercidos por los líquidos en reposo, es imprescindible para poder proyectar correctamente las estructuras hidráulicas que los contengan.

- Propiedades de la presión hidrostática:

    1. La fuerza de presión hidrostática en un punto de una masa líquida está siempre dirigida según la normal del elemento plano sobre el que actúa.
    2. En un punto de una masa líquida existe la misma presión hidrostática en todas las direcciones, es decir, la intensidad de la presión no depende del ángulo de inclinación de la superficie sobre la que actúa, siendo, por tanto, isotrópica.

ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA HIDROSTÁTICA



La figura representa un volumen elemental dentro de un fluido en reposo. Estará sometido a las presiones que sobre sus caras ejerce el resto del fluido y a la acción de las fuerzas exteriores $\vec{F}(X,Y,Z)$.

Si ρ es la densidad específica del líquido, la masa del elemento diferencial será: ρ·dx·dy·dz.

La condición de equilibrio estático entre las fuerzas actuantes sobre el eje OX será:

$$p\cdot dy\cdot dz-\left(p+\frac{\partial p}{\partial x}\cdot dx\right)\cdot dy\cdot dz+\rho\cdot dx\cdot dy\cdot dz\cdot X=0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial p}{\partial x}=\rho\cdot X$$

Análogamente obtendríamos al proyectar sobre los ejes OY y OZ:

$$p \cdot dx \cdot dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy \right) \cdot dx \cdot dz + \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot Y = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial y} = \rho \cdot Y$$

$$p \cdot dx \cdot dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz \right) \cdot dx \cdot dy + \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot Z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \rho \cdot Z$$

Estas ecuaciones se denominan ecuaciones de Euler de la Hidrostática y si se suman equivalen a la ecuación vectorial $\rho \cdot \vec{F} = \vec{\nabla} p$.

Si multiplicamos las ecuaciones de Euler respectivamente por dx, dy, dz, y sumamos, se obtiene:

$$dp = \rho \cdot (Xdx + Ydy + Zdz) = \rho \cdot (\vec{F} \cdot d\vec{s})$$

que es la Ecuación Fundamental de la Hidrostática. De ella se deduce la presión en el seno de un fluido en reposo sólo depende de la posición del punto considerado p (X,Y,Z).

SUPERFICIES ISOBARAS O DE NIVEL

Son aquellas que tienen la misma presión hidrostática en todos sus puntos. Al ser p(X,Y,Z) = K, será dp = 0 y la ecuación diferencial de las superficies de nivel, para ρ = cte, resultará:

$$X \cdot dx + Y \cdot dy + Z \cdot dz = 0$$

Luego $\vec{F}$ y $d\vec{s}$ son ortogonales para cualquier trayectoria sobre la superficie de nivel. Las superficies de nivel de un líquido en reposo, sometido exclusivamente a la acción de la gravedad, son ortogonales al campo de las fuerzas de atracción terrestre.

PRESIONES HIDROSTÁTICAS EN LOS LÍQUIDOS

Considerando una masa líquida en el campo gravitatorio terrestre, la ecuación fundamental de la hidrostática, para ρ = cte, resultará:

$$\vec{F} = 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} - g\,\vec{k}$$

$$dp = -g \cdot \rho \cdot dz = -\gamma \cdot dz$$

Integrando esta ecuación entre dos puntos $M_0(x_0, y_0, z_0)$ y M(x, y, z) del interior de la masa líquida en reposo, obtenemos:

$$\int_{P_0}^{P} dp = -\gamma \int_{z_0}^{z} dz \;\Rightarrow\; p - p_0 = \gamma(z_0 - z) \;\Rightarrow\; p = p_0 + \gamma(z_0 - z)$$

Expresión que nos proporciona la presión hidrostática en un punto cualquiera en función de la existente en otro punto de la misma masa líquida. Esta expresión también puede escribirse como:

$$z_0 + \frac{p_0}{\gamma} = z_i + \frac{p_i}{\gamma} = cte = altura\;\; piezométrica$$

que se denomina Ecuación General de la Hidrostática de los líquidos pesados.

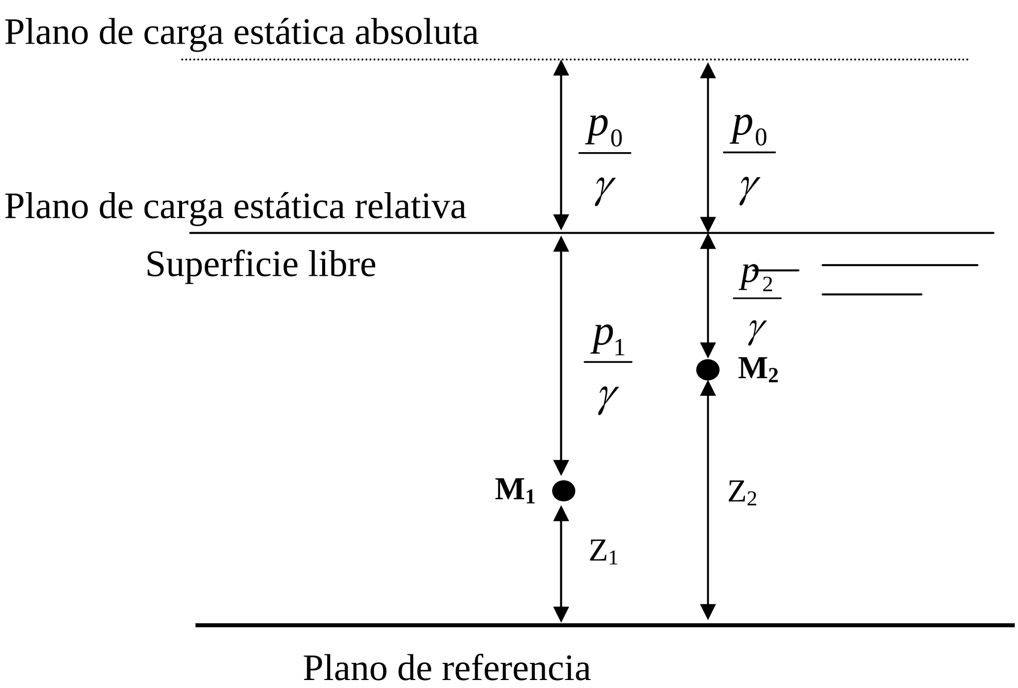
La **altura piezométrica** se corresponde con la **altura geométrica o altura de posición** (z) más la **altura de presión** (p/γ= h), que representa la altura de columna de líquido capaz de producir la presión p. Esta altura piezométrica permanece constante en todos los puntos del líquido en reposo.

Si consideramos el punto de referencia M_0 sobre la superficie libre del líquido, la presión en dicho punto p_0 será la presión atmosférica y la diferencia $(z_0\text{-}z)$ = h será la profundidad del punto considerado M:

$$p = p_0 + \gamma \cdot h$$

De la Ecuación General de la Hidrostática ($z + \frac{p}{\gamma} = cte$) se deduce:

1. Si en cada punto de un fluido en reposo se levanta un segmento vertical representativo de la altura de presión en dicho punto los extremos superiores de este segmento se encuentran en un plano horizontal.

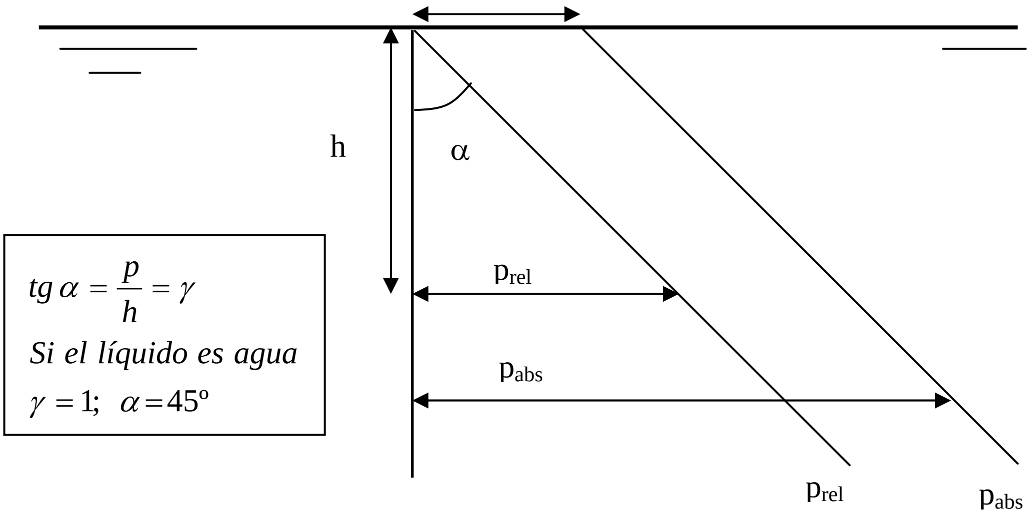


2. La diferencia de presión entre dos puntos de un fluido viene dada por el peso de una columna de dicho líquido de base unidad y altura igual a la diferencia de nivel entre ambas. Si uno de los puntos está en la superficie libre, sometido a la presión atmosférica, p_0, y el otro a una profundidad h, la presión será:

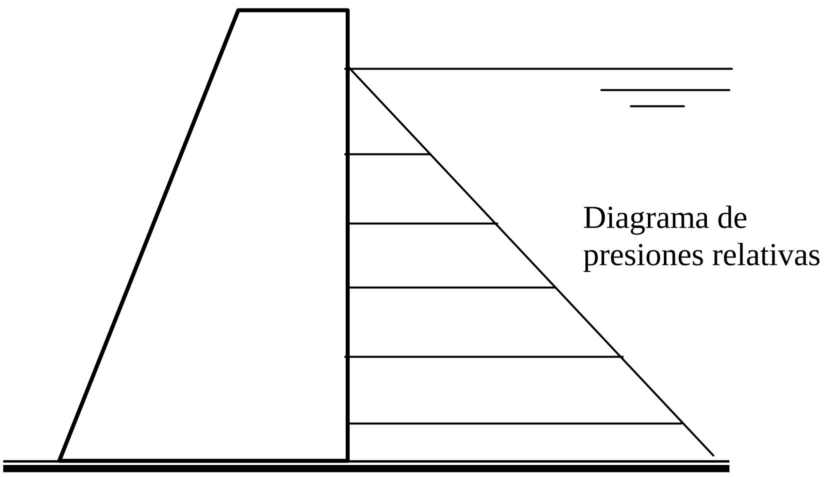
$$p_{abs} = p_0 + \gamma \cdot h$$

o bien:

$$p_{rel} = \gamma \cdot h$$



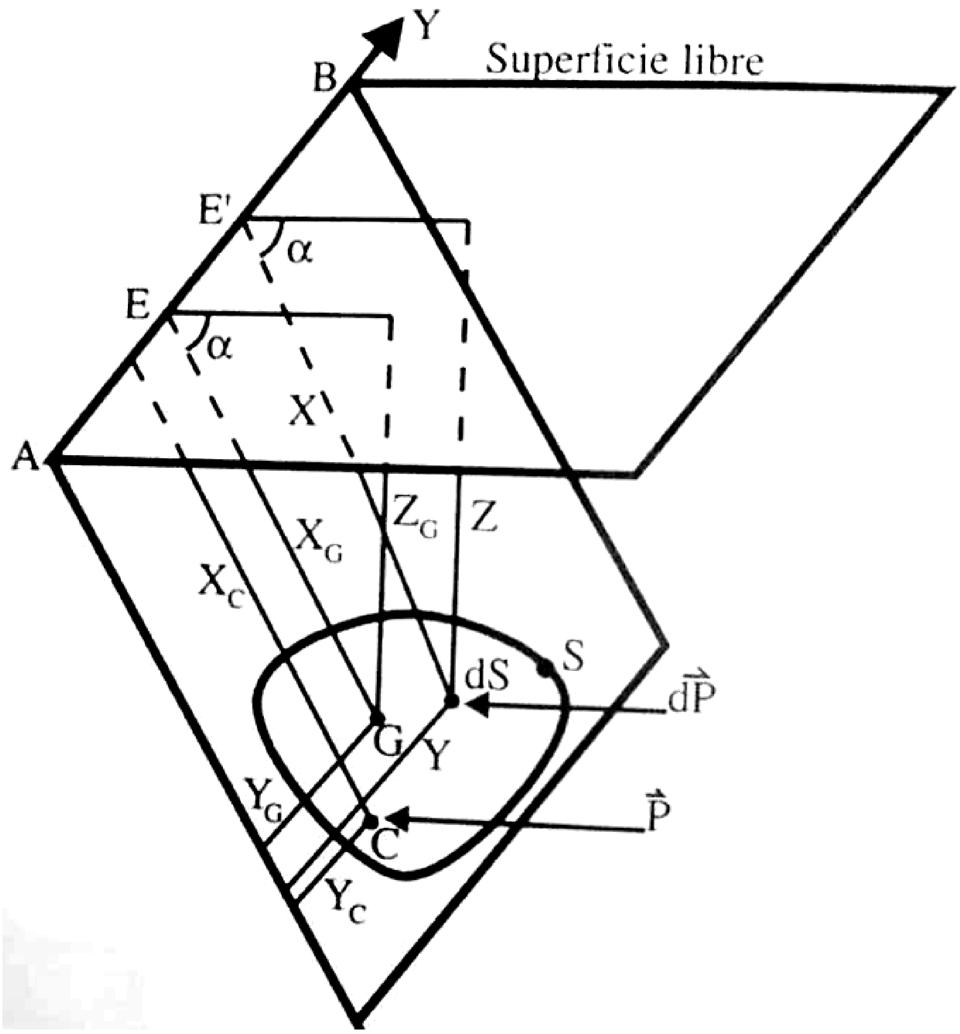
Distribución de presiones en la vertical de un líquido homogéneo



Distribución de presiones sobre el dique de un embalse

EMPUJES SOBRE SUPERFICIES PLANAS

Sea una superficie *S* plana sumergida, inclinada un ángulo α con respecto al plano horizontal de la superficie libre del líquido. Sea *dS* un elemento diferencial de área a la profundidad *z* y que diste *x* de la traza AB.



La fuerza elemental que actúa sobre el elemento de superficie es:
$$dp = p \cdot dS = \gamma \cdot z \cdot dS = \gamma \cdot x \cdot sen\alpha \cdot dS$$

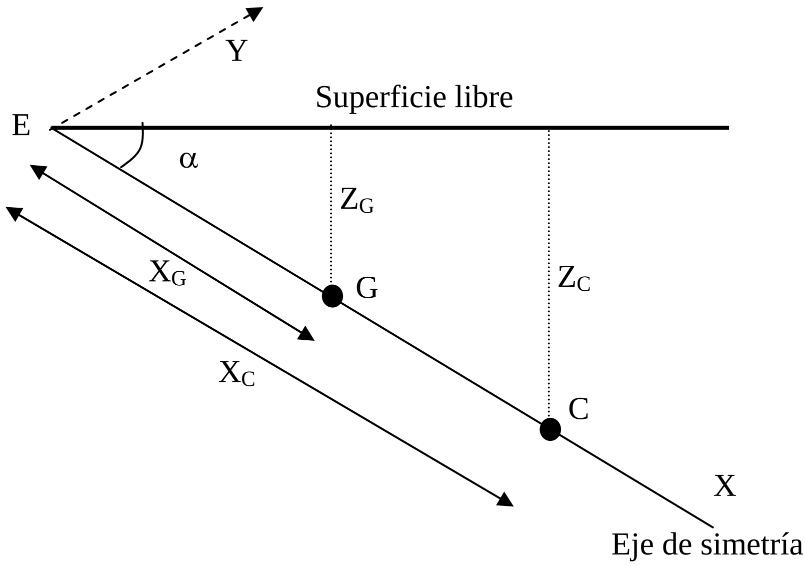
Como todas las fuerzas elementales son paralelas, la resultante de las fuerzas, *P*, que actúan sobre *S* será la integral extendida a todo el área:

$$P = \iint_S \gamma \cdot x \cdot sen\alpha \cdot dS = \gamma \cdot sen\alpha \cdot \iint_S x \cdot dS = \gamma \cdot sen\alpha \cdot X_G \cdot S = \gamma \cdot Z_G \cdot S = p_G \cdot S$$

El punto de aplicación de la fuerza resultante *P* se denomina **centro de presión** y en un caso general vendrá definido por sus tres coordenadas C(X_C, Y_C, Z_C). En los casos más corrientes en ingeniería, el área *S* suele tener un eje de simetría perpendicular a AB, sobre el que se sitúan G y C, por lo que sólo será necesario calcular X_C, ya que:

$$Z_C = X_C \cdot sen\alpha$$

$$Y_C = 0$$



Para determinar la distancia X_C igualaremos el momento del empuje total *P* respecto a dicha recta con la suma de los momentos de los empujes paralelos elementales *dp*.

$$P \cdot X_C = \iint_S x \cdot p \cdot dS$$

$$P = \gamma \cdot X_G \cdot sen\alpha \cdot S \; ; \qquad p = \gamma \cdot x \cdot sen\alpha$$

$$\gamma \cdot X_G \cdot sen\alpha \cdot S \cdot X_C = \gamma \cdot sen\alpha \cdot \iint_S x^2 \cdot dS$$

$$X_G \cdot S \cdot X_C = \iint_S x^2 \cdot dS = I_Y = I_{YG} + X_G^2 \cdot S$$

$$X_C = X_G + \frac{I_{Y_G}}{X_G \cdot S}$$

Esta ecuación demuestra que el centro de presión está por debajo del centro de gravedad y que su posición no depende del ángulo considerado.

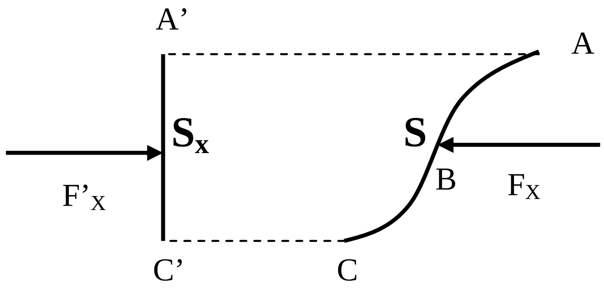
EMPUJES SOBRE SUPERFICIES CURVAS

Las fuerzas elementales de presión que actúan sobre los diferentes elementos de área de una superficie alabeada no son paralelas ni concurrentes, por lo que no se pueden sumar como en el caso anterior.

En aquellos casos particulares, de uso corriente en la ingeniería, en la que se manejan superficies de revolución con un plano vertical de simetría (cilindros, esferas, …), este será el plano donde se encuentre la fuerza resultante y será abordable el cálculo de las componentes horizontales y verticales del empuje del líquido sobre la superficie.

1. **Empuje horizontal**:
Se proyecta la superficie curva, representada por la traza ABC en el plano de simetría, sobre un plano vertical y estudiamos el equilibrio del volumen de agua definido (ABCC’A’).

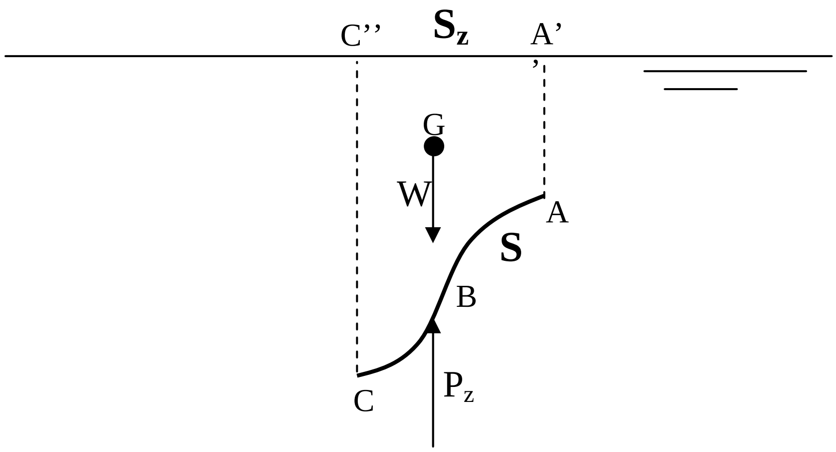
UNIVERSIDAD POLITECNICA DE CARTAGENA
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIERIA AGRONOMICA
Departamento de Ingeniería de Alimentos y del Equipamiento Agrícola
Edificio Minas, Pº Alfonso XIII, 48 • 30203 Cartagena (SPAIN)
Tel. 968-325732 – Fax. 968-325732



$$\sum F_x = \sum F'_x$$
$$P_x = \sum F'_x = \gamma \cdot Z_{GX} \cdot S_x$$

La magnitud de P_x equivale al empuje horizontal que soporta la proyección S_x de dicha superficie sobre el plano vertical. La coordenada Z_{GX} representa la profundidad del centro de gravedad de S_x. Esta fuerza de presión se aplicará según la trayectoria horizontal que para por el centro de presiones de S_x.

2. **Empuje vertical**:
Se proyecta la superficie curva, representada por la traza ABC en el plano de simetría, sobre el plano horizontal de la superficie libre del líquido y estudiamos el equilibrio del volumen de agua definido (ABCC''A'').



$$P_z = \sum F_z = W = \gamma \cdot V = \gamma \cdot \iint_{S_z} z \cdot dS_z = \gamma \cdot Z_G \cdot S_z$$

La línea de acción de P_z será la vertical que pasa por G.