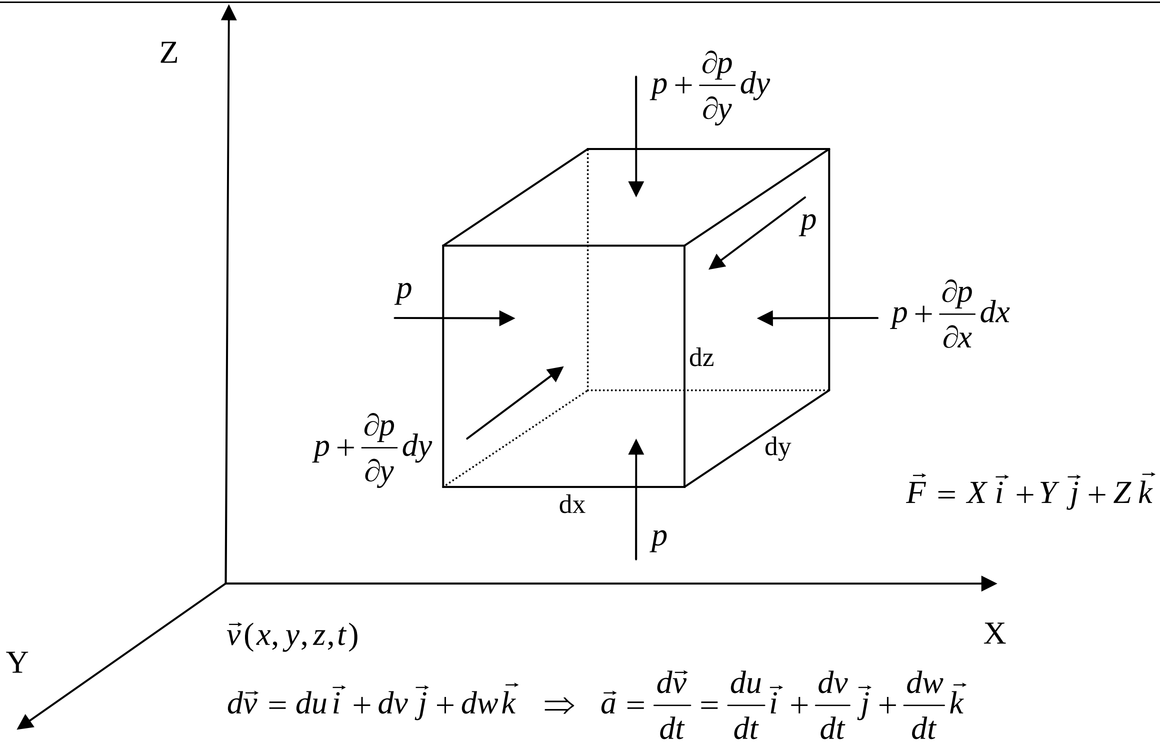
IV. DINÁMICA DE LIQUIDOS

- La hidrodinámica estudia el movimiento de los líquidos en movimiento teniendo en cuenta las causas que lo producen, es decir, las fuerzas actuantes.

- Las fuerzas que pueden actuar sobre un fluido real en movimiento son:
  - Fuerzas interiores:
    - Fuerza causada por el gradiente de presiones.
    - Viscosidad (nula en fluidos perfectos).
    - Elasticidad (nula en fluidos incompresibles).
    - Tensión superficial (despreciable frente al resto)
  - Fuerzas exteriores:
    - Gravedad.
    - Inercia.

ECUACIÓN FUNDAMENTAL DE LA HIDRODINÁMICA PARA UN FLUIDO PERFECTO (No viscoso e incompresible)



$\vec{v}(x, y, z, t)$

$$d\vec{v} = du\,\vec{i} + dv\,\vec{j} + dw\,\vec{k} \;\Rightarrow\; \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{du}{dt}\vec{i} + \frac{dv}{dt}\vec{j} + \frac{dw}{dt}\vec{k}$$

Equilibrio de fuerzas de una partícula de fluido en movimiento:

$$p \cdot dy \cdot dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \cdot dx\right) \cdot dy \cdot dz + \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot X = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{du}{dt}$$

$$p \cdot dx \cdot dz - \left(p + \frac{\partial p}{\partial y} \cdot dy\right) \cdot dx \cdot dz + \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot Y = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{dv}{dt}$$

$$p \cdot dx \cdot dy - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z} \cdot dz\right) \cdot dx \cdot dy + \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot Z = \rho \cdot dx \cdot dy \cdot dz \cdot \frac{dw}{dt}$$

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} + X = \frac{du}{dt}$$

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial y} + Y = \frac{dv}{dt}$$

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial p}{\partial z} + Z = \frac{dw}{dt}$$

Que son las **Ecuaciones de Euler** para un fluido en movimiento. Si multiplicamos las ecuaciones de Euler respectivamente por dx, dy, dz, y sumamos, se obtiene:

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE CARTAGENA
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIERIA AGRONOMICA
Departamento de Ingeniería de Alimentos y del Equipamiento Agrícola
Edificio Minas, Pº Alfonso XIII, 48 • 30203 Cartagena (SPAIN)
Tel. 968-325732 – Fax. 968-325732

$$-\frac{1}{\rho}\left(dp-\frac{\partial p}{\partial t}dt\right)+(Xdx+Ydy+Zdz)=u\cdot du+v.dv+w\cdot dw=v\cdot dv$$

$$d\vec{p}=\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz+\frac{\partial p}{\partial t}dt$$

que es la Ecuación Fundamental de la Hidrodinámica para un fluido perfecto.

Si la fuerza F deriva de un potencial $\vec{F}=-\nabla U$ la ecuación se expresa de la siguiente forma:

$$-\frac{1}{\rho}\left(dp-\frac{\partial p}{\partial t}dt\right)-dU=v\cdot dv$$

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE CARTAGENA
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIERIA AGRONOMICA
Departamento de Ingeniería de Alimentos y del Equipamiento Agrícola
Edificio Minas, Pº Alfonso XIII, 48 • 30203 Cartagena (SPAIN)
Tel. 968-325732 – Fax. 968-325732

GENERALIZACIÓN PARA EL MOVIMIENTO PERMANENTE DE LÍQUIDOS PERFECTOS. EC. DE BERNOUILLI

$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} = -g\vec{k} \;\Rightarrow\; campo\,gravitatorio$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = 0 \;\Rightarrow\; movimiento\;\; permanente$$

$$\rho = cte \;\Rightarrow\; líquido\;\; perfecto$$

La Ecuación Fundamental de la Hidrodinámica queda:

$$\frac{1}{\rho}dp + g\cdot dz + \vec{v}\cdot d\vec{v} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{dp}{\gamma} + dz + \frac{1}{g}\cdot v\cdot dv = 0$$

Que integrada entre dos puntos (1→2) de una línea de corriente:

$$\frac{1}{\gamma}(P_2 - P_1) + (z_2 - z_1) + \frac{1}{2g}(v_2^2 - v_1^2) = 0$$

$$\frac{P_2}{\gamma} + z_2 + \frac{v_2^2}{2g} = \frac{P_1}{\gamma} + z_1 + \frac{v_1^2}{2g} = H = cte$$

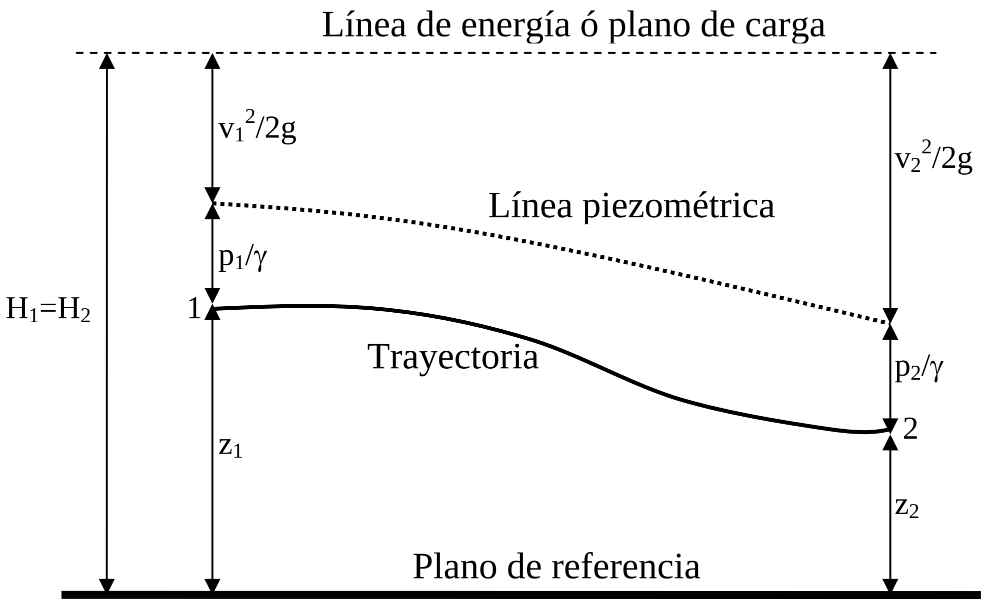
esta expresión, denominada **Ec. de Bernouilli**, representa el **principio de conservación de la energía mecánica**, ya que supone la invariabilidad a lo largo de una trayectoria o línea de corriente de la energía por unidad de peso *H* (energía específica) de un fluido perfecto.

En la Ec. de Bernouilli podemos distinguir tres tipos de energía específica:

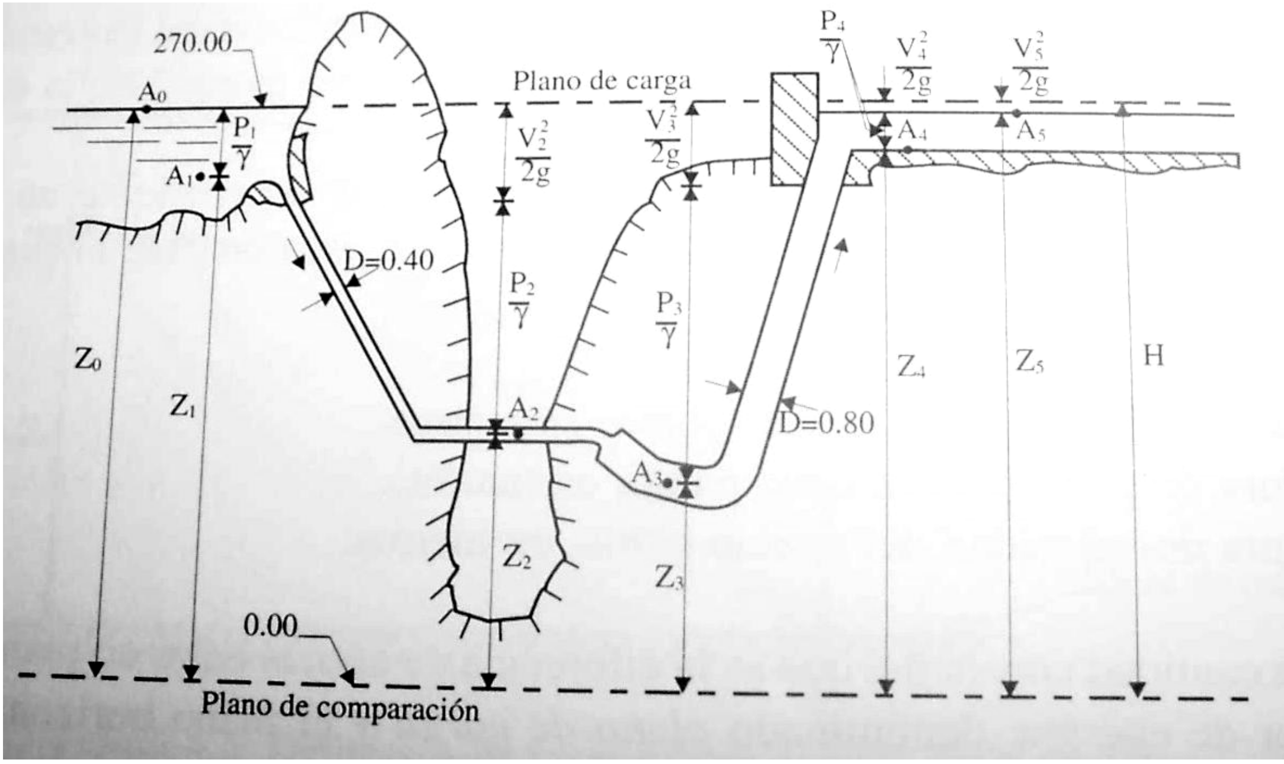
- *z*, que es la cota topográfica, es decir, la altura de un punto o molécula contada desde un plano de comparación. Es energía de posición por unidad de peso, se mide en m y se denomina altura geométrica.

- p/γ, que es la energía de presión por unidad de peso que posee la molécula de fluido sometida a la presión *p*. Se mide en m y se denomina altura de presión.
- $v^2/2g$, que es la energía de velocidad por unidad de peso que posee la molécula de fluido que se desplaza a la velocidad *v*. También se mide en m y se denomina altura cinética.

La suma de estas tres magnitudes es, en total, la energía mecánica por unidad de peso que posee una determinada partícula en una línea de corriente. Su representación gráfica define el **plano de carga** de una determinada corriente.



Si bien la suma de las tres alturas se mantiene constante, cada uno de ellos puede variar de un punto a otro. De esta forma, en una conducción horizontal (z=cte) cuando aumente la sección, disminuirá la velocidad y la altura cinética, lo que a su vez obliga a que aumente la altura de presión.



GENERALIZACIÓN DE LA EC. DE BERNOULLI PARA LÍQUIDOS REALES. PÉRDIDAS DE CARGA

Dado que los líquidos reales tienen **viscosidad**, el movimiento de los mismos generará unas **perdidas de energía** en forma de calor, originada por el rozamiento entre las moléculas y por el rozamiento de estas con los contornos que transportan al líquido. Por lo tanto, el principio de conservación de la energía mecánica a lo largo de una trayectoria se expresará de la siguiente forma:

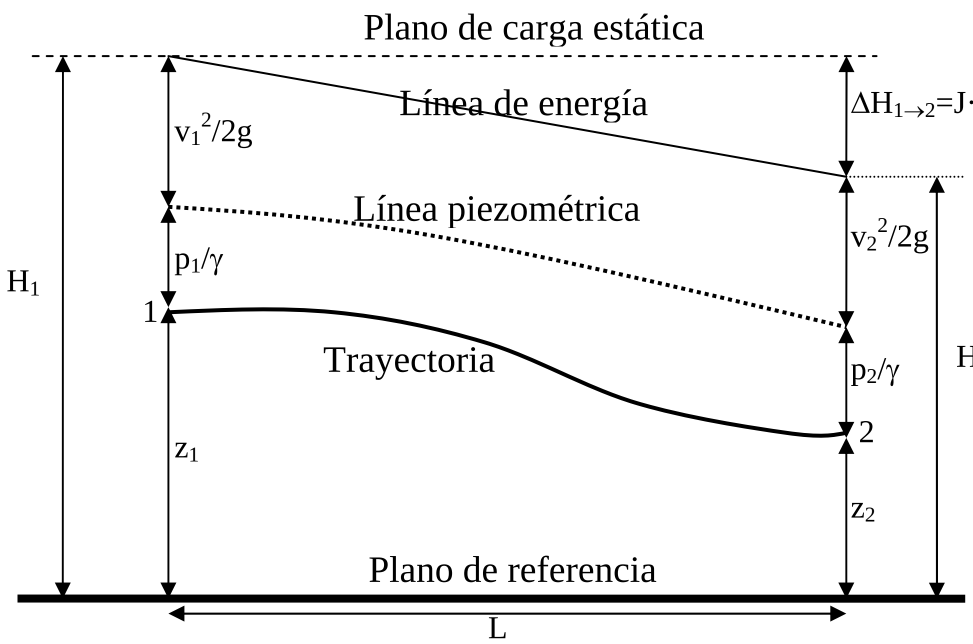
$$H_1 = H_2 + \Delta H_{1\rightarrow 2}$$

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} + \frac{v_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} + \frac{v_2^2}{2g} + \Delta H_{1\rightarrow 2}$$

donde $\Delta H_{1\to 2}$ son las **perdidas de carga totales** por unidad de peso expresadas en m. $\Delta H_{1\to 2}$ también se puede expresar como las **pérdidas de carga unitaria por unidad lineal** recorrida por el líquido *J* multiplicado por la longitud total de la trayectoria *L*.

$$\Delta H_{1\to 2}(m) = J(m/m)\cdot L(m)$$

La representación gráfica de la Ec. de Bernouilli generalizada será la siguiente:



Los rozamientos hacen que el plano de carga inicial, que en el teorema de Bernouilli para líquidos perfectos permanecía horizontal, vaya bajando cada vez más para no volver a recuperar nunca su anterior posición.

En los cálculos hidráulicos se consideran dos **tipos de pérdidas de carga**:

- Las debidas al rozamiento a lo largo de la conducción (h_r).

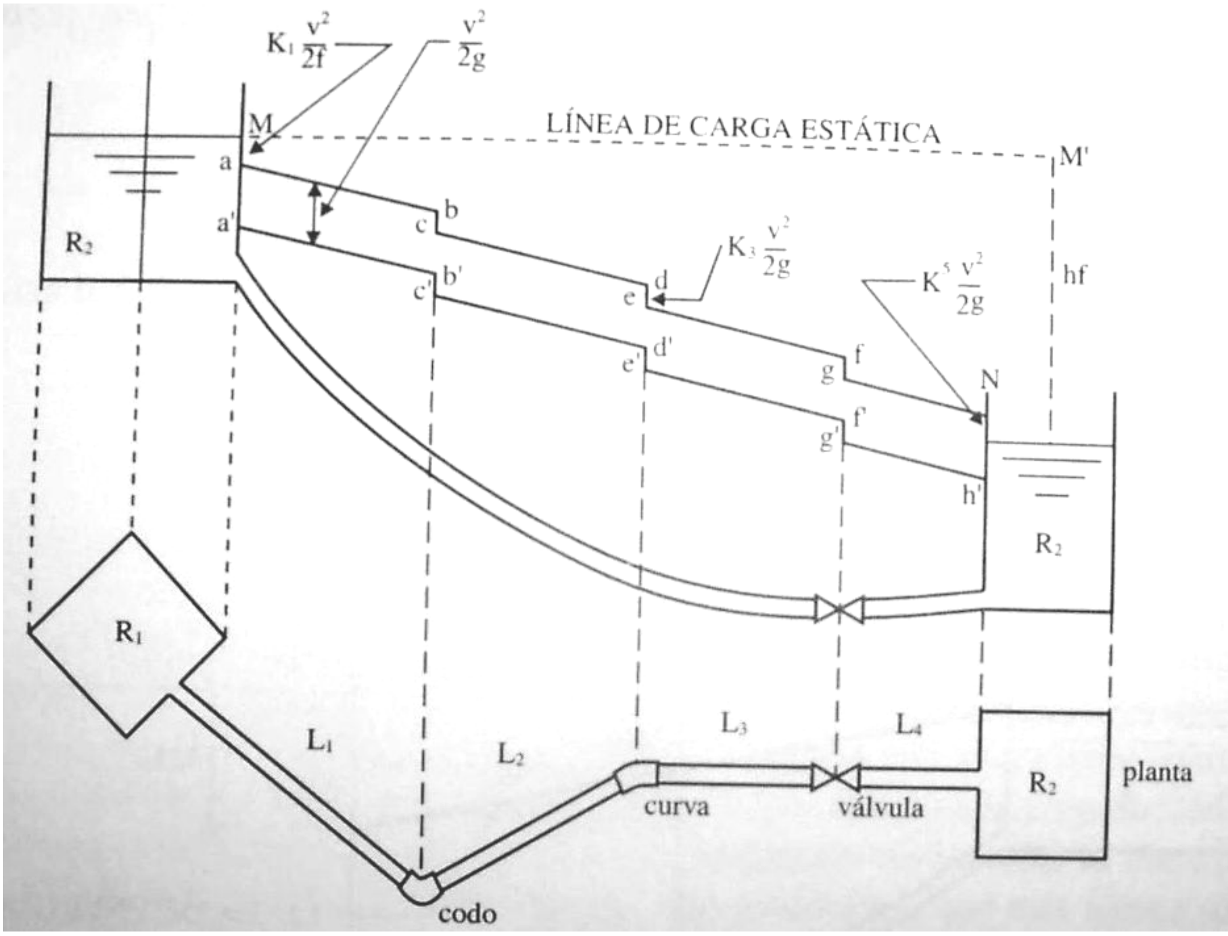
UNIVERSIDAD POLITECNICA DE CARTAGENA
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIERIA AGRONOMICA
Departamento de Ingeniería de Alimentos y del Equipamiento Agrícola
Edificio Minas, Pº Alfonso XIII, 48 • 30203 Cartagena (SPAIN)
Tel. 968-325732 – Fax. 968-325732

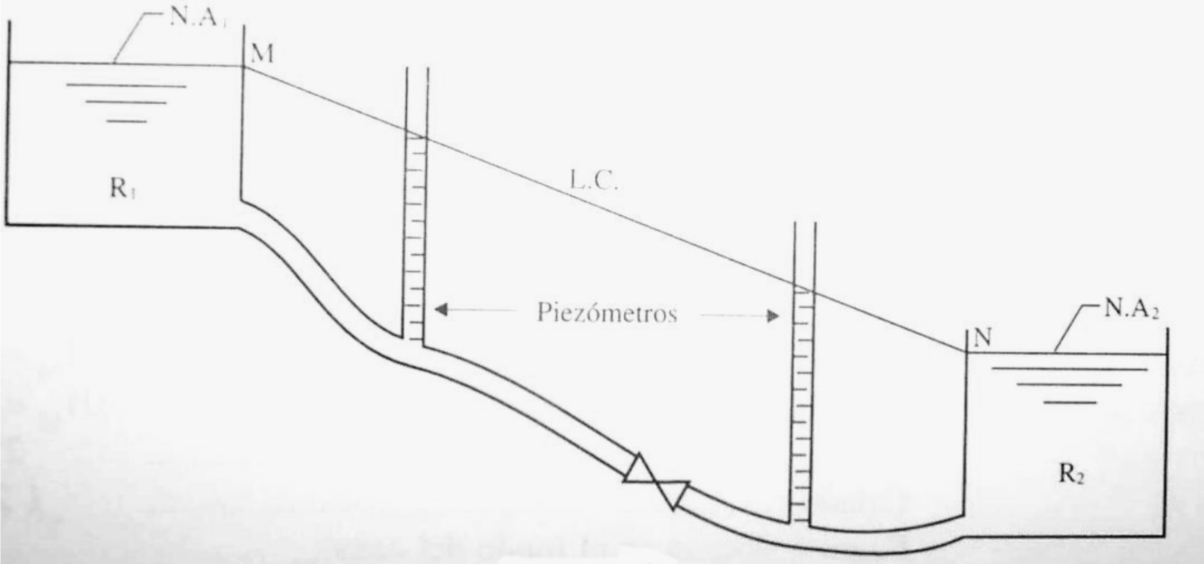
- Las producidas en las singularidades de las tuberías o piezas especiales (codos, curvas, derivaciones, tomas, válvulas, estrechamientos, etc.) (h_s).

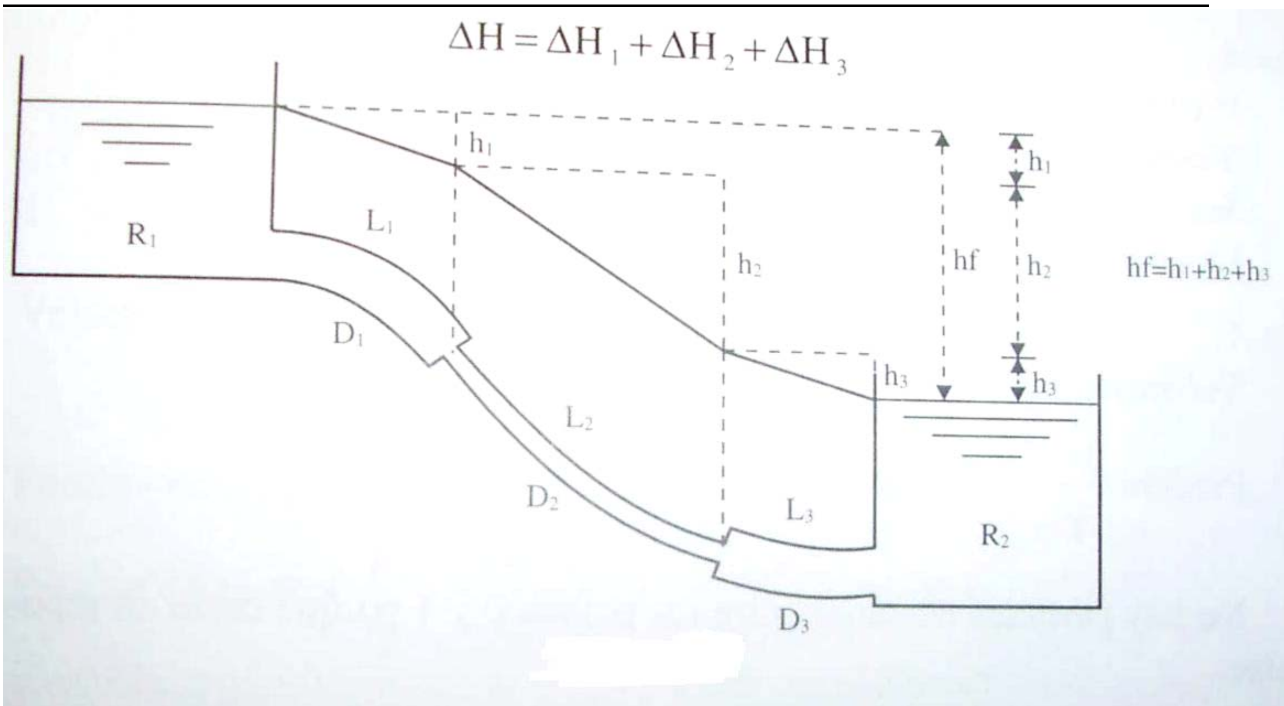
$\Delta H_{1\rightarrow 2} = h_c + h_s$

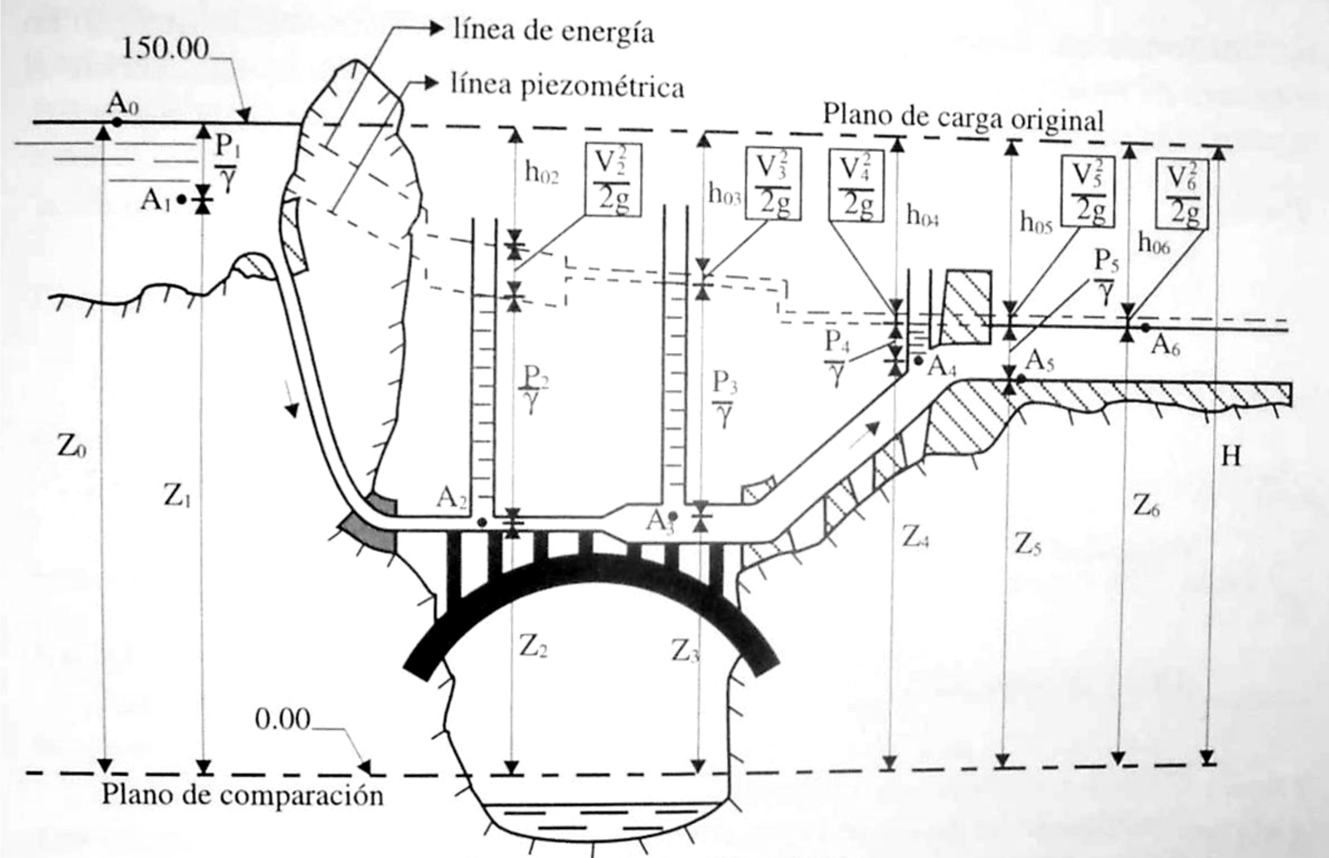
Si la conducción se compone de varios (i) tramos de longitudes desiguales, con una J diferente en cada uno de ellos, y diversos elementos singulares (j), las pérdidas de carga totales en la misma serán:

$$\Delta H_{1\rightarrow 2} = h_c + h_s = \sum_{i=1}^{i=n} J_i \cdot L_i + \sum_{j=1}^{j=n} h_{sj}$$




N.A.₁
M
R₁
L.C.
Piezómetros
N
N.A₂
R₂


$\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3$
h₁
R₁
L₁
h₂
hf
h₁
h₂
hf=h₁+h₂+h₃
D₁
h₃
h₃
L₂
D₂
L₃
R₂
D₃



Teorema de Bernouilli, aplicado

POTENCIA DE UNA CORRIENTE LÍQUIDA EN UNA SECCIÓN TRANSVERSAL

La potencia de una corriente líquida N es la energía total que lleva el flujo a través de una sección transversal S en la unidad de tiempo.

Para un tubo elemental de corriente:

$$dN = \gamma \cdot dQ \cdot H = \gamma \cdot dQ \cdot \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right)$$

Para toda la sección de la corriente:

$$N = \gamma \cdot \iint_S \left(z + \frac{P}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) \cdot dQ$$

Para el cálculo de esta integral es necesario conocer la distribución de presiones y de las velocidades en la sección transversal analizada:

- En un movimiento paralelo y uniforme en la sección el valor de $(z+p/\gamma)$ se mantendrá constante en la sección transversal S y $v^2/2g$ será asimismo constante en toda la sección resultando que:

$$N = \gamma \cdot \iint_S \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) \cdot dQ = \gamma \cdot H \cdot \iint_S dQ = \gamma \cdot H \cdot Q$$

- En un movimiento paralelo con velocidad variable en la sección el valor de $(z+p/\gamma)$ se mantendrá constante en la sección transversal:

$$N = \gamma \cdot \iint_S \left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{v^2}{2g} \right) \cdot dQ = \gamma \cdot (z + \frac{p}{\gamma}) \cdot Q + \gamma \iint_S \frac{v^2}{2g} dQ$$

Se define el **coeficiente de CORIOLIS** α como:

$$\alpha = \frac{\iint_S v^2 \cdot dQ}{V^2 \cdot Q}$$

y por tanto:

$$N = \gamma \cdot Q \cdot \left(z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{V^2}{2g} \right) = \gamma \cdot Q \cdot H_{media}$$

El coeficiente α es la relación existente entre la energía cinética real de la corriente y la energía cinética que tendría si la velocidad fuese constante e igual a la velocidad media en la sección *V*, con lo que tendría igual caudal.

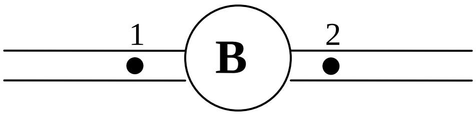
α siempre tiene un valor superior a 1. En régimen turbulento, que es el habitual en las aplicaciones agrarias de la hidráulica, α varía aproximadamente entre 1,01 y 1,10, por lo que se suele suponer **α = 1.**

POTENCIA DE UNA MÁQUINA HIDRÁULICA

Las máquinas hidráulicas se insertan en una corriente hidráulica bien para suministrarle energía (bombas) o bien para extraérsela y consumirla en otros usos (turbinas).

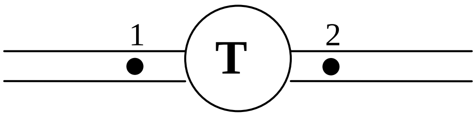
La potencia de una bomba hidráulica será:

$$H_B = \left(H_2 - H_1\right)$$
$$N_B = N_2 - N_1 = \gamma \cdot Q \cdot H_2 - \gamma \cdot Q \cdot H_1 = \gamma \cdot Q \cdot (H_2 - H_1) = \gamma \cdot Q \cdot H_B$$



La potencia de una turbina hidráulica será:

$$H_T = \left(H_1 - H_2\right)$$
$$N_T = \left(N_1 - N_2\right) \cdot \eta = \left(\gamma \cdot Q \cdot H_1 - \gamma \cdot Q \cdot H_2\right) \cdot \eta = \gamma \cdot Q \cdot \eta \cdot (H_1 - H_2) = \gamma \cdot Q \cdot \eta \cdot H_T$$



La Ec. de Bernouilli para una corriente con máquinas hidráulicas se expresa de la siguiente forma:

$$H_1 + \sum H_B - \sum H_T = H_2 + \sum \Delta H_{1 \to 2}$$

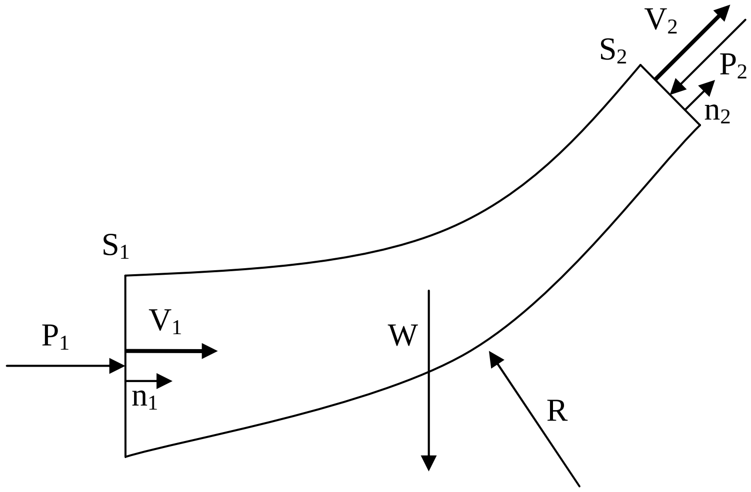
FUERZAS HIDRODINÁMICAS. ECUACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

Para variar la velocidad de una corriente líquida en dirección y/o en magnitud se necesita siempre una fuerza, y de acuerdo con el principio de acción y reacción, el líquido ejerce una fuerza igual y opuesta sobre el cuerpo que provoca el cambio de velocidad. Esta fuerza de la corriente se llama **fuerza hidrodinámica**.

Una corriente de agua desarrolla una serie de fuerzas hidrodinámicas cuyo conocimiento es necesario para diseñar bombas, turbinas, anclajes de codos, de tuberías, etc.

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE CARTAGENA
ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIERIA AGRONOMICA
Departamento de Ingeniería de Alimentos y del Equipamiento Agrícola
Edificio Minas, Pº Alfonso XIII, 48 • 30203 Cartagena (SPAIN)
Tel. 968-325732 – Fax. 968-325732

Consideremos una porción de fluido en un tubo de corriente, de masa m y limitado por las secciones 1 y 2:



Si esta porción de fluido esta sometida a una fuerza $\vec{F}$ durante un intervalo de tiempo *dt*, se cumplirá la segunda Ley de Newton:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \vec{F} \cdot dt = m \cdot d\vec{v} \quad (impulso \ = \ \text{var}\, iación \ cantidad \ de \ movimiento)$$

Integrando esta ecuación entre las dos secciones del tubo de corrienteinstantes y considerando un tiempo t se obtiene:

$$\int_0^t \vec{F} \cdot dt = \int_1^2 m \cdot d\vec{v} \ \Rightarrow \ \vec{F} \cdot t = m \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = V \cdot \rho \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$$

$$\vec{F} = \rho \cdot Q \cdot (\vec{v}_2 - \vec{v}_1) \ \textit{Ecuación de la cantidad de movimiento}$$

Si consideramos todas las fuerzas exteriores que actúan sobre la porción de líquido considerado:

$$\sum \vec{F} = P_1 \cdot S_1 \cdot \vec{n}_1 - P_2 \cdot S_2 \cdot \vec{n}_2 + \vec{W} + \vec{R} = \rho \cdot Q \cdot (v_2 \cdot \vec{n}_2 - v_1 \cdot \vec{n}_1)$$

Las fuerzas de rozamiento se consideran despreciables.